

# TÍNH TOÁN URANS ÁP DỤNG CHO CHUYỂN ĐỘNG VỚI SÓNG SHOCK MẠNH URANS SIMULATION APPLIED FOR FLOW WITH STRONG SHOCK WAVES

Nguyễn Anh Thi và Alziary de Roquefort T.\*

Bộ Môn Kỹ thuật Hàng không, Đại Học Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh, Việt Nam  
\*Laboratoire d'Etudes Aérodynamiques UMR ENSMA/CNRS 6609, France

## TÓM TẮT

Tính toán chuyển động với sóng shock mạnh được tính toán bằng phương pháp tích phân phương trình URANS 2D dùng phương pháp thể tích hữu hạn trên hệ lưới cấu trúc. Chuyển động rối được mô hình hoá dùng các phương trình truyền vận rối. Phương pháp này được dùng để tính toán chuyển động trong ống phun hoạt động trong điều kiện quá giãn nở. Tính toán cho kết quả phù hợp với các quan sát thực nghiệm, đặc biệt đối với lồi giải dừng. Trong một vài trường hợp, với điều kiện biên có tính phản xạ lớn, lồi giải không dừng được thiết lập với biên độ giao động hằng số sau khoảng thời gian khoảng 10ms. Tuy nhiên kết quả chuyển động không dừng nhận được 'không đủ ngẫu nhiên' so với kết quả thực nghiệm. Tính xác thực của lồi giải bất ổn định nhận được cần được xem xét!

## ABSTRACT

Flows with strong shocks and shock/boundary layer interactions have been investigated numerically using URANS formulation, integrated using finite volume method on a structured-grid. The turbulence is modeled with two equations turbulence models. The flow of rocket nozzles operating in over-expanded regime was simulated. The steady state results obtained are well agreed with experimental results. Some form of self-sustained unsteadiness has been recovered but with a significant influence upon downstream boundary conditions and not sufficiently random compared to experimental results. The validation of unsteadiness recovered by URANS formulation needs further study!

## 1. GIỚI THIỆU

Tính toán chuyển động với sóng shock mạnh và tương tác sóng shock/lớp biên đã và đang là vấn đề khó khăn mà giới tính toán số gặp phải. Đặc biệt tính bất ổn định của tương tác sóng shock/lớp biên vẫn nằm ngoài tầm của mô phỏng số hiện tại, mặc dù phương pháp LES và DNS đã đạt được những thành công nhất định. Trong bài báo này, ống phun động cơ hỏa tiễn hoạt động trong điều kiện quá giãn nở sẽ được tính toán bằng cách giải phương trình URANS, nhằm đánh giá khả năng của phương pháp này trong tính toán chuyển động có sóng shock mạnh và tương tác sóng shock/lớp biên.

## 2. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TOÁN SỐ

Những tính toán trong bài toán này sử dụng chương trình TGNS2D, tích phân phương trình URANS dùng phương pháp thể tích hữu hạn trên hệ lưới cong, cấu trúc thích ứng với biên tính toán. Các thành phần không nhớt được rời rạc hoá dùng giải thuật TVD đối xứng của Yee [1]. Các thành phần nhớt được rời rạc hoá dùng phương pháp sai phân trung tâm thông dụng trong hệ tọa độ cong  $(\xi, \eta)$ .

### 2.1. Rời rạc hoá trong không gian

Các biến sử dụng là các biến bảo toàn  $U = [\bar{\rho}, \bar{\rho}u, \bar{\rho}v, \bar{\rho}E, \bar{\rho}k, \bar{\rho}\varepsilon]^T$ . Gọi  $J$  là Jacobi của phép chuyển tọa độ  $(\xi, \eta) \leftrightarrow (x, y)$ , phương trình URANS viết trong hệ tọa độ cong  $\xi, \eta$ :

$$J \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial \eta} + \bar{S} = 0 \quad (1)$$

Trong đó:

$$\bar{F} = +F \frac{\partial y}{\partial \eta} - G \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad \bar{G} = -F \frac{\partial y}{\partial \xi} + G \frac{\partial x}{\partial \xi},$$

$$\bar{S} = JS \quad (2)$$

Các thông lượng đối lưu được số hoá dùng phương pháp TVD đối xứng của Yee [1]. Thông lượng số  $\hat{F}_{i+1/2, j}$  trên biên  $(i+1/2, j)$  của thể tích kiểm soát:

$$\hat{F}_{i+1/2, j} = \frac{1}{2} \left[ (y_\eta)_{i+1/2, j} (F_{i, j} + F_{i+1, j}) - (x_\eta)_{i+1/2, j} (G_{i, j} + G_{i+1, j}) - \bar{R}_{\tilde{\xi}+1/2, j} \Phi_{\tilde{\xi}+1/2, j} \right] \quad (2)$$

Các thành phần của vector  $\Phi_{\tilde{\xi}+1/2, j}$  xác định bởi:

$$\Phi_{\tilde{\xi}+1/2, j}^l = \psi \left( a^l_{\tilde{\xi}+1/2, j} \right) \left( \alpha^l_{\tilde{\xi}+1/2, j} - Q^l_{\tilde{\xi}+1/2, j} \right)$$

trong đó  $\alpha_{\tilde{\xi}+1/2, j} = R_{\tilde{\xi}+1/2, j}^{-1} (U_{i+1, j} - U_{i, j})$  và

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial U} = A_\xi = R_\xi \Lambda_\xi R_\xi^{-1}. \quad \Lambda_\xi \text{ là ma trận đường}$$

chéo chứa các giá trị riêng  $a^l_\xi$ ,  $\Lambda_\xi = \text{diag}(\tilde{u}, \tilde{u}, \tilde{u}, \tilde{u}, \tilde{u} + \tilde{c}, \tilde{u} - \tilde{c})$ , với

$$\tilde{u} = y_\eta u - x_\eta v, \quad \text{với } \tilde{c} = c(y_\eta^2 + x_\eta^2)^{1/2}. \quad \text{Các ma}$$

trận  $R_\xi, \Lambda_\xi, R_\xi^{-1}$  là hàm của  $U_{i+1/2, j}$  được tính

dựa trên trung bình Roe [2] sao cho:

$$\bar{F}_{i+1, j} - \bar{F}_{i, j} = A_{\tilde{\xi}+1/2, j} (U_{i+1, j} - U_{i, j}) \quad (3)$$

Limiteur  $Q$  sử dụng là phiên bản đối xứng của Yee:

$$Q_{\tilde{\xi}+1/2, j} = \min \text{mod} \left( \alpha_{\tilde{\xi}-1/2, j}, \alpha_{\tilde{\xi}, j}, \alpha_{\tilde{\xi}+3/2, j} \right)$$

Hàm  $\psi(a^l)$  xác định bởi:

$$\psi(a^l) = \begin{cases} |a^l| & \text{ khi } |a^l| > \delta^l \\ \frac{(a^l)^2 + (\delta^l)^2}{2\delta^l} & \text{ khi } |a^l| < \delta^l \end{cases}$$

Ngưỡng  $\delta^l$  được áp dụng nhằm tránh trường hợp tiêu tán quá nhỏ trong lân cận các điểm tại đây giá trị riêng đổi dấu. Để tính toán chính xác lớp biên trong lân cận tường rắn, cần phải bảo đảm độ tiêu tán số không quá lớn trong vùng này.

## 2.2 Tích phân theo thời gian

Tích phân theo thời gian được tính sử dụng giải thuật do Yee, Klopfer, và Montagne [1] đề xuất:

$$\Delta U_{i, j}^n - \frac{\Delta t}{(1 + \omega) J_{i, j}} \mathfrak{T}(U_{i, j}^{n+1}) = \frac{\omega}{1 + \omega} \Delta U_{i, j}^n \quad (4)$$

Giải thuật cho kết quả chính xác bậc nhất theo thời gian khi  $\omega = 0$ , và bậc hai khi  $\omega = 1/2$ . Tất cả các tính toán trình bày ở phần sau của bài báo thực hiện với  $\omega = 1/2$ .

Thông thường toán tử  $\mathfrak{T}$  tuyến tính hóa quanh  $t^n$ . Hệ phương trình tính toán nhận được sau khi tuyến tính hoá được nghịch đảo dùng phương pháp ADI:

$$\left[ I + \Delta t \partial_\xi A^n + \Delta t H^n \right] \left[ I + \Delta t H^n \right]^{-1} \times \left[ I + \Delta t \partial_\eta B^n + \Delta t H^n \right] \Delta U = RHS \quad (5)$$

Trong đó, RHS là vế phải của hệ phương trình tuyến tính,  $A^n$  và  $B^n$  là Jacobi tương ứng với toán tử đạo hàm theo  $\xi$  và  $\eta$  tính ở thời điểm  $t^n$ ,  $H^n$  là ma trận Jacobi các thành phần nguồn.

## 2.3 Mô hình rối

Các mô hình rối hai phương trình bảo toàn như Launder-Sharma, SST của Menter được sử dụng, với một số thay đổi nhằm tăng tính bền vững của mô hình cũng như phù hợp với tính toán tia phun dạng tròn.

Mô hình rối hai phương trình được xây dựng dựa trên giả thuyết Boussinesq, ví dụ như mô hình  $(k, \varepsilon)$ , ứng suất Reynolds được tính như sau:

$$\frac{u_i u_j}{k} = -2c_\mu \left( \frac{k}{\varepsilon} \right) S_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad (6)$$

Trong (6),  $c_\mu = 0.09$ . Nghiên cứu của More và More [3] cho thấy phương trình này có thể cho giá trị âm đối với ứng suất chính nếu đại lượng  $S_{ij} k/\varepsilon$  có giá trị quá lớn. Mặt khác, trong trường hợp lớp biên 2D với gradient áp suất lớn, ứng suất trượt trên tường rắn tỉ lệ thuận với động năng rối:

$$-\overline{u'v'} \cong \sqrt{c_\mu k} \quad (7)$$

Dựa trên các nhận xét trên, More và More đề xuất một mô hình rối phi tuyến trong đây  $c_\mu$  được tính như sau:

$$c_\mu = \min \left( 0.09, \frac{1}{A_0 + A_s (s^2 + A_\Omega \Omega^2)^{1/2}} \right) \quad (8)$$

với:

$$\begin{cases} s = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{2S_{ij}S_{sj} - \frac{2}{3}S_{kk}^2} & S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\ \Omega = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}} & \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \end{cases}$$

Tồn tại hai tập hệ số cho phương trình (3):

$$\begin{cases} \text{Moore} & : A_0 = 2.85 \quad A_s = 1.77 \quad A_\Omega = 1 \\ \text{Durbin} & : A_0 = 0 \quad A_s = 2\sqrt{3} \quad A_\Omega = 0 \end{cases}$$

Mô hình rối loại hai phương trình với hệ số  $c_\mu$  tính như (3) có những lợi điểm sau:

- Bằng cách giới hạn độ nhớt, mô hình dẫn đến một số dạng chuyển động không dừng mà mô hình gốc cho lời giải dừng.

- Bằng cách giới hạn độ nhớt trong các vùng có độ biến dạng lớn, mô hình cho phép nâng cao đáng kể tính bền vững của chương trình, đặc biệt đối với vùng có sóng shock mạnh (một số mô hình rối ‘tao ra’ quá nhiều rối sau sóng shock).

Tuy nhiên cần lưu ý rằng, khác với các phương pháp như LES và DES, phương pháp mô hình hoá này hoàn toàn độc lập với lưới chia và nghiên cứu hội tụ lưới cần phải được nghiên cứu. Ý nghĩa vật lý thật sự của chuyển động không dừng nhận được từ giải phương trình URANS cần phải được xem xét.

## 2.4 Điều kiện biên

Điều kiện biên được sử lý dùng phương pháp **LODI** (*Locally One Dimensional Inviscid*) để

xuất bởi Poinot và Lele [5]. Trên biên mở, các điều kiện sau được sử dụng:

- **Lưu chất vào miền tính toán với tốc độ dưới âm (subsonic inflow)**: áp suất dừng, enthalpy dừng, phương của vector vận tốc, động năng rối  $k$ , và một biến số khác đặc trưng cho chuyển động rối ( $\varepsilon$  hay  $\omega$ ) được áp đặt.

- **Lưu chất ra khỏi miền tính toán với tốc độ dưới âm (subsonic outflow)**: áp suất tĩnh được áp đặt.

- **Lưu chất ra khỏi miền tính toán với tốc độ trên âm (supersonic outflow)**: không có điều kiện biên vật lý, các biến số được ngoại suy.

Tại biên có lưu chất ra khỏi miền tính toán với tốc độ dưới âm, các sóng áp suất bị phản xạ lại trong miền tính toán khi gặp biên. Cường độ sóng phản xạ tính dùng phương pháp đề xuất bởi Rudy và Stikverda [4].

Điều kiện biên được xử lý một cách không tường minh nhằm bảo đảm tính tương thích với các điểm nội. Nhiều phương pháp tích phân được sử dụng và so sánh bao gồm: ADI, DDADI (Diagonally Dominant ADI), DDLU (Diagonally Dominant Lower Upper Decomposition), và các giải thuật lặp. Tính ổn định của các phương pháp trên khác nhau không đáng kể. Các kết quả tính toán trình bày trong bài báo này được tính dùng phương pháp DDADI.

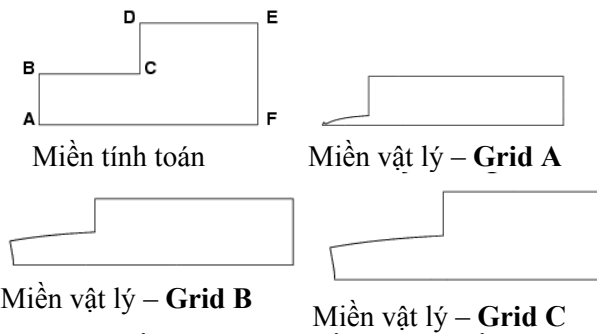
Số CFL lớn nhất bảo đảm tính ổn định của phương pháp số tùy thuộc vào lưới chia, mô hình rối, và lời giải cần tìm (đặc trưng thời gian của trường chuyển động). Các giá trị CFL thay đổi từ 20 đến 2000, tương ứng với bước thời gian “khá nhỏ”. Do vậy quá trình tính toán hội tụ sau khoảng 5000 đến 10000 vòng lặp. Bước thời gian bị giới hạn bởi tính ổn định chứ không phải tính chính xác của giải thuật, do vậy cần thiết nâng cao tính ổn định của giải thuật và loại trừ các ràng buộc về kích thước ô lưới.

## 3. MỘT SỐ KẾT QUẢ

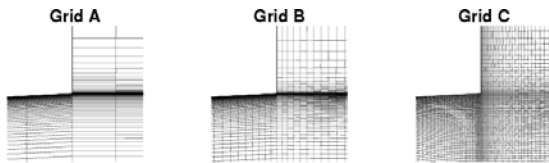
Hình 1 trình bày miền tính toán và miền vật lý tương ứng với 3 lưới chia khác nhau. Mục đích là nhằm nghiên cứu hội tụ lưới. Hình 2 trình bày đặc điểm của lưới chia ở vùng ngõ ra của ống phun. Lưới ở vùng này có mật độ lớn nhằm tính toán chính xác vùng chuyển động ngược với tốc độ thấp ở mép của ống phun. Thông số đặc trưng của hệ thống lưới cho trong Bảng 1.

Bảng 1: Thông số đặc trưng của các lưới chia

	Grid A	Grid B	Grid C
Block 1 (bên trong ống phun)	161 x 100	130 x 150	160 x 150
Block 2 (bên ngoài ống phun)	100 x 80	121 x 200	121 x 200
Tổng số mắt lưới	34000	43550	48050
Tỉ số kéo giãn lưới cục đại	16330	1128	1128
Tỉ số kéo giãn ở ngõ ra ống phun	1096	117	1
Biên phía sau $(X_{max} - X_e) / D$	10	3	1.8
Biên trên $Y_{max} / D$	2.5	1	1



Hình 1: Miền tính toán và miền vật lý của ống phun



Hình 2: Lưới chia trong vùng ngõ ra của ống phun

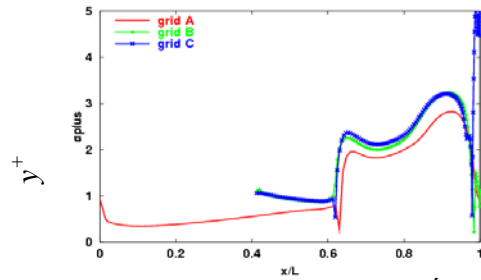
Đối với lưới A, biên AB nằm trong vùng hạ thanh phía trước cổ của ống phun. Ví thể, trên biên AB chúng ta áp áp suất dừng, enthalpy dừng, phương của vận tốc, và hai biên đặc trưng cho rôi. Đối với lưới B và C, biên AB nằm trong vùng siêu thanh trong phần phân kỳ của ống phun. Do vậy điều kiện biên Dirichlet được sử dụng cho biên này. Biên BC và CD là biên trượt đoạn nhiệt.

Trên các biên mở DE và EF, điều kiện biên được xử lý dùng phương pháp LODI (Local One Dimensional Inviscid) [5]. Các điều kiện dừng được áp dụng khi lưu chất đi vào miền tính toán. Khi lưu chất đi ra miền tính toán, áp suất tĩnh được gán. Tuy nhiên các điều kiện biên này gây ra sự phản xạ với cường độ ‘quá lớn’ của sóng áp suất ngược vào miền tính toán. Tuy nhiên không dễ dàng áp điều kiện biên không phản xạ, vì ít nhất giá trị trung bình theo thời gian của áp suất cần phải xác định để cố định tỉ số áp suất.

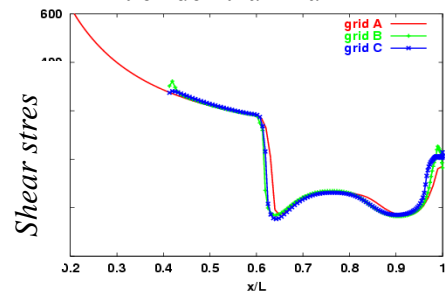
Trong phạm vi bài báo này, khó khăn trên được khắc phục dùng phương pháp Rudy – Stikverda [5], với biên độ của sóng phản xạ liên hệ với sai khác giữa áp suất cục bộ và áp suất khí trời:

$$L_1 = (1 - M^2) \frac{P - P_\infty}{t_r} \quad (9)$$

trong đây  $M$  là số Mach cục bộ, và  $t_r$  là hằng số thời gian xác định tính phản xạ nhiều hay ít của điều kiện biên.

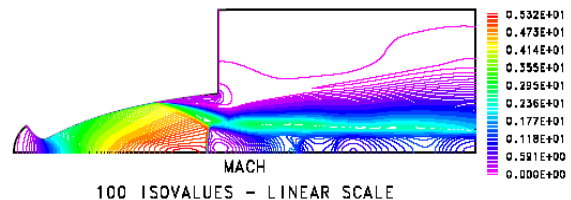


a) khoảng cách vô thứ nguyên của mắt lưới đầu tiên đến thành rắn



b) Ứng suất trượt trên thành rắn  
Hình 3: Kết quả nghiên cứu hội tụ lưới (grid convergence)

Hình 3 trình bày khoảng cách vô thứ nguyên của lưới thứ nhất  $y^+ = \rho_w u_w y / \mu_w$  và ứng suất trượt trên thành ống phun  $\tau_w$ . Kết quả cho thấy sự hội tụ của cả ba hệ lưới dùng tính toán.

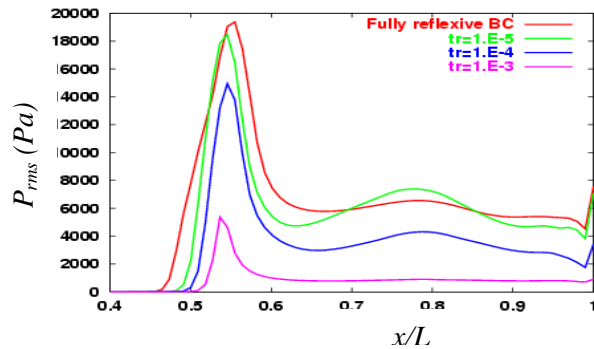


Hình 4: Trường số Mach của ống phun loại TIC,  $p_i / p_a = 40$

Hình 4 là trường số Mach của ống phun loại TIC hoạt động tại tỉ số áp suất  $p_i / p_a = 40$ . Kết quả cho thấy sự tách rời lớp biên bên trong ống phun

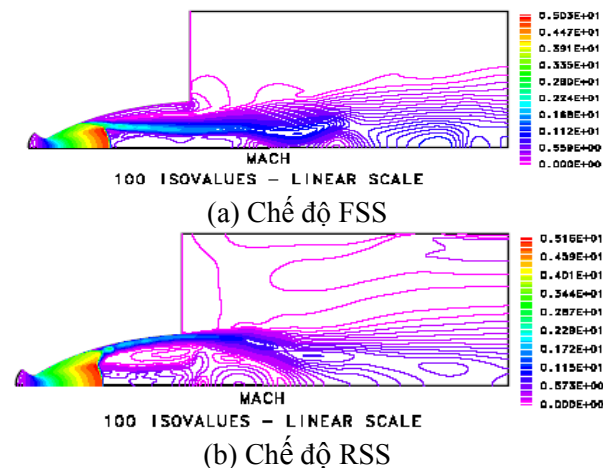
và một MACH DISK vuông góc với trục đối xứng của ống phun. Topology chuyển động này được gọi là tách rời lớp biên tự do (free shock separation).

Lời giải dừng nhận được ở trên nhận được với điều kiện biên trên DE và EF có tính phản xạ thấp, tức với  $t_r \approx 10^{-3}$ .



Hình 5: RMS của mạch động áp suất  
Hình 5 cho thấy trong trường hợp điều kiện biên phản xạ hoàn toàn (fully reflexive), ta nhận được lời giải không ổn định với biên độ không đổi sau thời gian khoảng 10ms. Trung bình quân phương của mạch động áp suất cho trên Hình 5 phù hợp về biên độ với kết quả thực nghiệm [8], tuy nhiên kết quả chuyển động không dừng nhận được ‘không đủ ngẫu nhiên’ so với kết quả thực nghiệm [6,7].

Tính toán cho nhiều tỉ số áp suất khẳng định sự không tồn tại Topology tách rời lớp biên giới hạn (restricted flow separation) trong loại ống phun TIC (Truncated Ideal Nozzle).



Hình 6: Hiện tượng trễ của ống phun loại TOC,  $p_i/p_a = 17.5$

Hình 6 trình bày trường số Mach của ống phun loại TOC ở tỉ số áp suất  $p_i/p_a = 17.5$ . Hình 6(a) nhận được bằng cách bắt đầu tính toán với tỉ số áp suất thấp hơn 17.5 và giảm dần cho đến

khí đạt 17.5. Ngược lại, kết quả trên Hình 6(b) nhận được bằng cách bắt đầu tính với tỉ số áp suất cao hơn 17.5 và giảm dần đến 17.5. Sự tồn tại hai lời giải khác nhau cùng tỉ số áp suất trong một vùng tỉ số áp suất nhất định, được biết đến như là hiện tượng trễ (hysteresis), là hiện tượng cố hữu của ống phun loại TOC (Thrust-Optimized Nozzle) đã được khẳng định bởi nhiều thí nghiệm [7,8,9].

#### 4. KẾT LUẬN

Tính toán số dùng phương trình URANS. Phương trình URANS tích phân dùng phương pháp thể tích hữu hạn trên hệ lưới cấu trúc.

Kết quả tính toán, áp dụng cho trường hợp ống phun động cơ hỏa tiễn hoạt động trong điều kiện quá giản nở, cho kết quả phù hợp với quan sát thực nghiệm. Áp dụng thay đổi đề xuất bởi More & More dẫn đến tồn tại chuyển động bất ổn định trong ống phun ở điều kiện tỉ số áp suất không đổi. Tuy nhiên kết quả chuyển động không dừng nhận được ‘không đủ ngẫu nhiên’ so với kết quả thực nghiệm, và phụ thuộc nhiều vào việc xử lý điều kiện biên. Tính xác thực của lời giải bất ổn định nhận được từ URANS cần được tiếp tục xem xét trong tương lai?

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Yee H., Klopfer G.H., Montagne J.L. (1990), *Journal of Computational Physics*, Vol. 88, pp. 31-61.
2. Roe P.L. (1981), *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, pp. 357-372.
3. More J.G., More J. (1999), AIAA Paper 99-3779, 32th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion & Exhibit, USA.
4. Rudy D.H., Strikverda J.C. (1981), *Journal of Computational Physics*, Vol. 36, pp. 55 – 70.
5. Poinso T.J., Lele S.K. (1992), *Journal of Computational Physics*, Vol. 101, pp. 104 - 129.
6. Anh Thi Nguyen et al. (2003), *Journal of Flow, Turbulence and Combustion*, Vol. 71, pp. 161-181.
7. Deck S., Nguyen Anh Thi (2004), *AIAA Journal*, Vol. 42, N° 9, pp.1878-1888.
8. Anh Thi Nguyen Thèse doctorat, Université de Poitiers, FRANCE (2003).
9. Caporicci M. et al. (1994), AIAA Paper 94-3263, 32th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion & Exhibit, USA.