SỰ TỒN TẠI NGHIỆM TOÀN CỤC CỦA BAO HÀM THỨC TÍCH PHÂN NGẪU NHIÊN TRONG KHÔNG GIAN BANACH
THE EXISTENCE OF GLOBAL SOLUTION FOR RANDOM MULTI-VALUED INTEGRAL EQUATION IN BANACH SPACES

Nguyễn Đình Huy

Khoa Khoa học Ứng dụng, Đại học Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh, Việt nam

---

BẢN TÓM TẮT

Bài báo nghiên cứu một lớp phương trình dạng bao hàm thức tích phân ngẫu nhiên trong không gian Banach. Tác giả đã chứng minh được sự tồn tại nghiệm liên tục mạnh của phương trình đó trong trường hợp hàm dưới dấu tích phân thoã mãn các giả thiết Filippov.

ABSTRACT

The paper studies a class of solution for random multi-valued integral equation in Banach Spaces. The author proved the existence of the strongly continue solution of the equation in case of that the function under the integral satisfies the Filippov‘s hypothesis

1. Mở đầu

Bài báo này là sự mở rộng của [7] cho trường hợp ngẫu nhiên, ta sẽ sử dụng các ký hiệu đã dùng trong [7] và[3]. Xét phương trình:

$$x(\omega,t) \in a(\omega,s,t) + \int_{T_0(\omega)}^{t} G(\omega,s,t)\, F(\omega,s,x(\omega,s))\,ds \qquad (1)$$

ở đây ω là tham số được lấy trong Ω , a : Graph I → X,

$G : \{(\omega,s,t) \in \Omega \times R^2 : (s,t) \le I^2(\omega), s \le t\} \to L(Y,X)$

$F : \{(\omega,s,x) \in \Omega \times R \times X : (\omega,s) \in \text{Graph } I, x \in X\} \to 2^Y$

Khi đó với các giả thiết thích hợp cho các hàm a(.) ,G (.) và F (.) thì phương trình (1) có nghiệm.

Nghiên cứu về các tính chất định tính của phương trình (1) được đề câp đến trong các kêt quả của Castaing , Phan Văn Chương và nhiều tác giã khác . Bài báo này nghiên cứu sự tồn tại nghiệm liên tục mạnh của phương trình (1), với F thỏa mãn các giã thiết Filippov.

Trong bài báo này ta dùng các ký hiệu sau : $(\Omega,\mathcal{A})$ là không gian đo,

$(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ là các không gian Banach khả ly, X', Y' là các không gian đối ngẫu mạnh của chúng . L(Y,X) là không gian các ánh xạ tuyến tính liên tục từ Y vào X .X_σ là không gian tương thích với tôpô yếu. ß(X) là σ-trường Borel trong X .$\mathcal{L}$ là σ-trường các tập đo được trên đường thẳng R $\mathcal{L}^1_Y(I)$ $\left(L^1_Y(I)\right)$ là không gian các hàm ds-khả tích (các lớp tương đương các hàm ds-khả tích) từ I tương thích với độ đo Lebesgue vào Y: $\mathcal{L}^1(I) = \mathcal{L}^1_R(I)$;

$L^\infty_{Y'(R)}$ là không gian các hàm bị chặn ds-đo được từ R vào $(Y', \sigma(Y',Y))$; $L^1(I) = L^1_R(I)$. $C_x(I)$ $\left(C_{x_\sigma}(I)\right)$: Không gian các hàm liên tục từ I vào X $\left(X_{\sigma,} tuong\, ung\right)$. Cuối cùng một ánh xạ đa trị Γ từ không gian đo được , $(\sum ,\mathcal{B})$ lên không gian metric khả ly E. Kí hiệu Graph Γ là dồ thị của

Γ : tức là tập hợp { (s, a) ∈ ∑.E : a ∈ Γ(s) }; đặt $\Gamma^-(A)$ = { s ∈ ∑: Γ(s) ∩ A ≠ ∅}, ở đây A⊂ E , $\mathbb{S}_\Gamma$ được ký hiệu là tập các lát cắt $\mathcal{B}$-đo được của Γ. I được ký hiệu là khoảng đóng ngẫu nhiên, $I: \omega \to Cl[T_0(\omega), T(\omega))$ **với**

$-\infty < T_0(\omega) \le T(\omega) \le +\infty$, hàm đa trị có giá trị là các khoảng đóng của $[T_0(\omega), T(\omega))$ sao cho với mỗi t thuộc R, thì tập $I^-(\{t\})$ thuộc A.

2 SỰ TỒN TẠI NGHIỆM

2.1 Định nghĩa Một hàm x:Graph I → E được gọi là nghiệm ngẫu nhiên của phương trình (1) nếu thoả mãn các điều kiện sau :
a)Với mỗi ω thuộc Ω, x(ω,.) là nghiệm trên I(ω) của phương trình (1) theo nghĩa cho trong [7].
b)Với mỗi t thuộc R, x(.,t) là $\mathcal{A}$- đo được trên $I^-(\{t\})$.

2.2 Định lý

Gĩa sử rằng
(a.1) Với mỗi ω ∈Ω, a(ω,.) là hàm liên tục mạnh và bị chặn trên I(ω).
(a.2) Với mỗi t ∈ R, a(.,t) là hàm $\mathcal{A}$ - đo được trên I^- ({t}).
(G.1) Với mỗi t ∈ R và y ∈ Y, G((.,.),t)y là hàm $\mathcal{A}\otimes\mathcal{L}$ -đo được trên tập hợp {(ω,s) ∈ Ω × R : ω ∈ I ({t}), s ≤ t} và tồn tại một hàm $\mathcal{A}$- đo được hữu hạn b(.) trên Ω sao cho

$$\sup_{t\in I(\omega)} css.\sup_{S\in[T_0(\omega),t]} \|G(\ \omega\ ,s,t)\|_{L(Y,X)} \le b(\omega)$$

với mọi ω ∈ Ω

(G.2) Với mỗi (ω,t) ∈ Graph I

$\int_{T_0(\omega)}^{\min(t',t)} \left\| G(\omega,s,t') - G(\omega,s,t) \right\|_{L(Y,X)} ds \to 0$ khi $t' \to t$ trong $I(\omega)$

(F.1) Với mỗi ω in Ω, F(ω,s,x) là tập lồi đóng và F(ω,s,x) ⊂ α(ω,s)[1 + ||x||] K(ω) với hầu khắp s ∈ I(ω) và với mọi x ∈ X, ở đây α : Graph I → R_+ là hàm $\mathcal{A}\otimes\mathcal{L}$ -đo được sao cho α(ω,.) ∈$\mathcal{L}^1$ (I(ω)) với mọi ω ∈Ω và K là một hàm đa trị với giá trị com păc yếu $\mathcal{A}$ - đo được từ Ω vào Y.

(F.2) với mỗi ω ∈ Ω và với hầu khắp s ∈ I(ω),hàm F(ω,s,.) là nửa liên tục trên (u.s.c) trên X theo tôpô σ(X,X') trên X theo tôpô σ(Y,Y')trên Y.

(F.3) Với mỗi x ∈ X, tồn tại một hàm $\mathcal{A}\otimes\mathcal{L}$ -đo được y: Graph I→X sao cho với bất kỳ ω ∈ Ω, thì y(ω,s) ∈ F(ω,s,x) với hầu khắp s ∈ I(ω).
Khi đó phương trình (1) có nghiệm ngẫu nhiên toàn cục .

Chứng minh .

Trước hết chú ý rằng I là một hàm đa tri $\mathcal{A}$ - đo được [8], đặc biệt Graph I ∈$\mathcal{A}\otimes\mathcal{L}$ ([3], mệnh đề III.13). ký hiệu $\{t_i(.)\}_{i=1}^{\infty}$ và $\{k_i(.)\}_{i=1}^{\infty}$ là các biểu diễn castaing của I và K,tương ứng . Ta có thể giả thiết rằng với mỗiω ∈ Ω, K(ω) là tập lồi compact yếu và chứa điểm gốc của Y. Đặt
c(ω) = 1 + sup {|| a(ω, t)|| : t ∈ I(ω)}, $c_1(\omega) = 1 + b(\omega)$,
k(ω) = sup $\{\|y\|_Y : y \in k(\omega)\}$. Khi đó ta có c(ω) = 1 + sup{|| a(ω,t_i(ω))|| : i ∈ N }, k(ω) = sup$\{\|k_i(\omega)\|_Y : i \in N\}$, như vậy c(.), c_1(.), k(.) là các hàm $\mathcal{A}$ - đo được .

Bây giờ ta đăt :

$$h(\omega,s) = \begin{cases} 1+\alpha(\omega,s) & \text{neu } (\omega,s) \in \text{Graph I} \\ 0 & \text{neu } (\omega,s) \in \Omega\times R \setminus Graph\ I \end{cases}$$

$$Z(\omega,t) = -1 + \left[1 + c(\omega)\right] \exp c_1(\omega) k(\omega) \int_{T_0(\omega)}^{t} h(\omega,s) ds$$

$$\sum(\omega,s) = h(\omega,s)\left[1 + Z(\omega,s)\right] K(\omega)$$

Bởi vì Graph I ∈$\mathcal{A}\otimes\mathcal{L}$ và hàm h(ω,s) là $\mathcal{A}\otimes\mathcal{L}$ -đo được trên Ω×R do đó, với mỗi t ∈ R, hàm Z(.,t) là $\mathcal{A}$ -đo được ,từ đó suy ra Z(.,.) là $\mathcal{A}\otimes\mathcal{L}$ -đo được trên Ω×R ([3], bổ đề III.14). Như vậy ∑:Ω×R → 2^Y là hàm $\mathcal{A}\otimes\mathcal{L}$ -đo được , từ đó suy ra có biểu diễn Castaing : $\{h(\omega,s)\,[\,1 + Z(\omega,s)\,]\,k_i(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$.

Với mỗi ω ∈ Ω ký hiệu C(ω) là tập các lát cắt khả tích của ∑(ω,.). Do hàm h(ω,.) ∈ $\mathcal{L}^1$(R) cho nên C(ω) =$\mathbb{S}_{\Sigma(\omega,.)}$ là tập lồi compact yếu khác rỗng trong $L_Y^1(R)$. Do đó C là một hàm đa trị đo được từ Ω lên $L^1_Y(R)$. Bây giờ với mỗi ω ∈ Ω và hàm f ∈ $L^1_Y(R)$,ta đặt :

$$x_{\omega,f}(t) = a(\omega,t) + \int_{T_0(\omega)}^{t} G(\omega,s,t)\,f(s)\,ds \qquad (t \in I(\omega))$$

và giả thiết rằng Γ(ω,f) là tập tất cả các lớp hàm đo được g:R → Y sao cho g(s) ∈F(ω,s,$x_{\omega,f}$(s)) hầu khắp trên I(ω) và g(ω) = 0 trên R \ I(ω).Khi đó theo chứng minh của định lý 2.1 của [7] ta có: ∅ ≠ Γ(ω, f) ⊂ C(ω) với mọi ω ∈Ω và f ∈ C(ω). Từ đó ta có các hàm đa trị C và Γ được xét trong
($L^1_Y(R)$, σ($L^1_Y(R)$, $L^{\infty}_{Y'}(R)$)) được thỏa mãn các điều kiện của định lý 2.1 trong [7] . Ta đặt f:ω → f_ω là một lát cắt ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$(L^1_Y))đo được của C. Khi đó hàm $x_{\omega,f_\omega}(t) = a(\omega,t) + \int_{T_0(\omega)}^{t} G(\omega,s,t)\,f_\omega(s)\,ds$ là liên tục mạnh theo biến
t∈ I(ω) và với mỗi $\omega \in \Omega$ cố định, nó là hàm $\mathcal{A}$ -đo được trên $I^-(\{t\})$ với mỗi t cố định trong R ,do đó nó là hàm $\mathcal{A}$⊗$\mathcal{L}$ -đo được theo 2 biến
(ω,t) ∈ Graph I . Theo các điều kiện (F.1), (F.2), có tồn tại một hàm
g: Graph I → Y là hàm ($\mathcal{A}$⊗$\mathcal{L}$, $\mathcal{B}$(x))-đo được sao cho với mỗi ω ∈ Ω,
thì g(ω, s) ∈ $F(\omega,s,x_{\omega,f_\omega}(s))$ hầu khắp trên I(ω). Ta đặt hàm

$$\hat{g}_\omega(s) = \hat{g}(\omega,s) = \begin{cases} g(\omega,s) & \text{neu } (\omega,s) \in \text{Graph I} \\ 0 & \text{neu } (\omega,s) \in \Omega \times R \setminus \text{Graph I} \end{cases}$$

Bởi vì Graph I ∈$\mathcal{A}$⊗$\mathcal{L}$ và hàm $\hat{g}$ là ($\mathcal{A}$⊗$\mathcal{L}$, $\mathcal{B}$(Y))-đo được, cho nên hàm $\hat{g}$: ω → $\hat{g}$(ω,.) là hàm ($\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ (L^1_Y))-đo được (theo định lý III-38 [3]), bởi vậy tồn tại hàm $\hat{g}_\omega$ là lát cắt đo được của Γ(ω, f_ω) với mọi ω ∈Ω . Nên tồn tại hàm f^o ∈ S_C sao cho f_ω^0 là lát cắt đo được của $\Gamma(\omega, f_\omega^0)$ với mọi ω ∈ Ω. Từ đó hàm $x(\omega,t) = x_{\omega,f_\omega}(t)$ là nghiệm ngẫu nhiên liên tục mạnh của phương trình (1) trên toàn khoảng ngẫu nhiên I . Thật vậy`, điều kiện (a) của định nghĩ a 2.1 về nghiệm đã được chứng minh trong định lý 2.1 của [7], mặt khác điều kiện b) vừa được chứng minh trên, đúng cho mọi hàm $x_{\omega,f_\omega}(t)$ với f ∈ $\mathbb{S}_C$. Định lý được chương minh .

Tài liệu dẫn

[1] **G.Anichini and P.Zecca**, Multivalued DifferentialEquations in Banach Spaces .An Application to Control Theory.Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.21 N^0 4 (1977) 477-486.

[2] **C.Berge**, Spaces Topologiques, in “Fonction Multivoques”, Dunod,Paris ,(1959).

[3] C.Castaing and M. Valadier, “convex Analysis and Measurable Multifunctions”,Lecture Notes in Mathematics. N^0 580. Springes-Verlag, Berlin, New York,(1977).

[4] R.E.Edwardz, "Functional Analysis .Theory and Applications",Holt , Rinehert and Winston, New York , London, (1965)

[5] Nguyen Dinh Huy and Nguyen Khoa Son, On the qualitative properties of the solution set to functional differential inclusions in Banach spaces, Journal of Math 19,(1991).

[5] Nguyen Dinh Huy and Nguyen Khoa Son,On the existence of solutions to functional differential inclusions with boundary values. 25 , (1997).

[7] Nguyen Dinh Huy and Nguyen Khoa Son, Existence the solution for multi-valued integral equations, Journal of Math 32, (2004)

[8] **Phan Văn Chương** , A density theorem with application in relaxation of non-convex valued differential equations, J. Math.Anal. Appl.124(1987), .

[9]**R.T.Rockafellar**. Integral functionals, normal integrands and measurable selections , in " proc. Colloq. Nonlinear Operator and the Calculus of Variations", Lecture Notes in Mathematics, N^0 543.

Địa chỉ :Nguyễn Đình Huy ,Khoa KHƯD ,Trường Đại Học Bách Khoa TP Hồ Chí Minh 268 Lý Thường Kiệt ,Q.10 TP HCM , e-mail: dinhhuy56 @ hcmut.edu.vn