MỘT ĐỊNH LÝ KHÔNG TỒN TẠI NGHIỆM DƯƠNG CỦA MỘT PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN
A NONEXISTENCE THEOREM FOR POSITIVE SOLUTION OF A NONLINEAR INTEGRAL EQUATION

Đinh Văn Ruy, Nghiêm Thị Vân Anh

Trường Đại học Công Nghiệp Tp. Hồ Chí Minh, Việt nam
12 Nguyễn Văn Bảo, Gò Vấp, Tp. Hồ Chí Minh, Việt nam

BẢN TÓM TẮT

Chúng tôi xét phương trình tích phân phi tuyến sau đây

$$u(x) = \int_{IR^N} \frac{g(x,y,u(y))}{|y-x|^{\sigma}}\, dy, \ \ \forall x \in IR^N, \qquad (*)$$

trong đó σ là một hằng số dương cho trước và $g(x,y,u)$ là hàm liên tục cho trước thỏa điều kiện $g(x,y,u) \geq M\,\dfrac{|y|^{\beta} u^{\alpha}}{(1+|x|)^{\gamma}},\ \forall x, y \in IR^N,\ \forall u \geq 0,$ với $\alpha,\beta,\gamma \geq 0$ và $M > 0$ là các hằng số cho trước. Chúng tôi chứng minh theo cách sơ cấp rằng nếu $0 \leq \alpha \leq (\beta+N)/(\sigma+\gamma)$, $0 < \sigma < \min\{N, N+\beta-\gamma\}$, $N \geq 2$ thì phương trình (*) không có nghiệm dương.

ABSTRACT

We consider the nonlinear integral equation

$$u(x) = \int_{IR^N} \frac{g(x,y,u(y))}{|y-x|^{\sigma}}\, dy, \qquad \forall x \in IR^N, \qquad (*)$$

where σ is a given positive constant and the given function $g(x,y,u)$ is continuous and $g(x,y,u) \geq M\,\dfrac{|y|^{\beta} u^{\alpha}}{(1+|x|)^{\gamma}},\ \forall x, y \in IR^N,\ \forall u \geq 0,$ with some constants $\alpha,\beta,\gamma \geq 0$ and $M > 0.$ By proving elementarily, we prove that if $0 \leq \alpha \leq (\beta+N)/(\sigma+\gamma)$, $0 < \sigma < \min\{N, N+\beta-\gamma\}$, $N \geq 2$ the nonlinear integral equation (*) has no positive solution.

1. GIỚI THIỆU

Chúng tôi xét sự không tồn tại nghiệm dương của phương trình tích phân phi tuyến sau

$$(1)\quad u(x) = b_N \int_{IR^N} \frac{g(x,y,u(y))}{|y-x|^{\sigma}}\, dy,\ \ \forall x \in IR^N,$$

trong đó $b_N = 2\left((N-1)\omega_{N+1}\right)^{-1}$ với ω_{N+1} là diện tích của mặt cầu đơn vị trong IR^{N+1}, $N \geq 2$; σ là một hằng số dương cho trước với $0 < \sigma < N$, và $g : IR^{2N} \times IR_+ \to IR$ là hàm liên tục cho trước thỏa điều kiện:

Tồn tại các hằng số $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ và $M > 0$ sao cho

$$(2)\quad g(x,y,u) \geq M \frac{|y|^{\beta} u^{\alpha}}{(1+|x|)^{\gamma}},\ \forall x, y \in IR^N,\ \forall u \geq 0,$$

và một số điều kiện phụ sau đó.

Trong trường hợp $\sigma = N-1$, phương trình tích phân (1) được thành lập từ bài toán Neumann phi tuyến sau đây

$$(3)\quad \Delta v = \sum_{i=1}^{N+1} v_{x_i x_i} = 0,\ \ x \in IR^N,\ \ x_{N+1} > 0,$$

$$(4)\quad -v_{x_{N+1}}(x,0) = g(x, v(x,0)),\ \ x \in IR^N,$$

mà giá trị biên $u(x) = v(x,0)$ cùng với một số điều kiện phụ, là nghiệm của phương trình tích phân

$$(5)\quad u(x) = b_N \int_{IR^N} \frac{g(y,u(y))}{|y-x|^{N-1}}\, dy,\ \ \forall x \in IR^N.$$

Trong [2] các tác giả Bunkin, Galaktionov, Kirichenko, Kurdyumov, Samarsky đã nghiên cứu bài toán (3), (4) với $N = 2$ và phương trình Laplace (3) có dạng tọa độ trụ

$$(6)\quad u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + u_{zz} = 0,\ \ \forall r > 0,\ \ \forall z > 0,$$

và với điều kiện biên phi tuyến có dạng cụ thể như sau

$$(7)\quad -u_z(r,0) = I_0 \exp(-r^2 / r_0^2) + u^{\alpha}(r,0),\quad \forall r \geq 0,$$

trong đó I_0, r_0, α là các hằng số dương cho trước. Bài toán (6), (7) là bài toán dừng liên quan đến vấn đề đốt cháy bởi bức xạ. Trong trường hợp $0 < \alpha \leq 2$ các tác giả trong [2] đã chứng minh rằng bài toán (3), (4) không có nghiệm dương. Từ khi bài báo [2] xuất hiện đã có nhiều tác giả nghiên cứu và mở rộng theo nhiều hướng khác nhau [1-13].

Các tác giả Long, Ruy [8] đã được mở rộng một kết quả trong [2] với (7) được thay bởi điều kiện biên phi tuyến tổng quát

$$(8)\quad -u_z(r,0) = g(r, u(r,0)),\ \ r \geq 0.$$

Trong [9] bài toán (3), (4) được xét với $N = 2$ và hàm g là liên tục, không giảm và bị chặn dưới bởi một hàm lũy thừa bậc α đối với biến thứ ba. Chúng tôi đã chứng minh rằng nếu $0 < \alpha \le 2$ bài toán như thế không có nghiệm dương[9].

Trong [3, 4] chúng tôi đã xét bài toán (3), (4) với $N \ge 3$. Hàm số $g: IR^N \times IR_+ \to IR_+$ là liên tục, không giảm đối với biến u, thỏa điều kiện (2) với $\gamma = 0$ và một số điều kiện phụ. Trong trường hợp $0 \le \alpha \le N/(N-1)$, $N \ge 2$ chúng tôi đã chứng minh rằng bài toán (3), (4) không có nghiệm dương[3, 4].

Trong [6, 7] các tác giả đã chứng minh sự không tồn tại nghiệm dương của bài toán (3), (4) với

(9) $g(x,u) = u^\alpha$.

Trong [6] Hu và Yin đã chứng minh với $1 \le \alpha < N/(N-1)$, $N \ge 2$, và trong [7] Hu đã chứng minh với $1 < \alpha < (N+1)/(N-1)$, $N \ge 2$.

Cũng cần chú ý rằng hàm $g(x,u) = u^\alpha$ không thỏa các điều kiện được giả thiết trong các bài báo [3, 8, 11]. Nhờ một số điều chỉnh một số thủ thuật đánh giá, ở trường hợp nầy cũng được chú ý giải quyết bởi Anh[1] Long [12], Ruy[13].

Trong bài báo nầy, chúng tôi xét phương trình tích phân phi tuyến (1) với $0 < \sigma < \min\{N, N + \beta - \gamma\}$, $N \ge 2$. Hàm $g(x,y,u)$ liên tục thỏa điều kiện (2) mà (9) là một trường hợp riêng. Bằng chứng minh sơ cấp chúng tôi tổng quát hóa các kết quả trong [1-13] rằng nếu $0 \le \alpha \le (\beta + N)/(\sigma + \gamma)$, phương trình (1) không có nghiệm liên tục dương.

2. SỰ KHÔNG TỒN TẠI NGHIỆM DƯƠNG

Không làm mất tính tổng quát, chúng ta có thể giả sử rằng $b_N = 1$ với việc thay đổi hằng số M trong giả thiết (1.2) của g. Phương trình tích phân (1) được viết lại với $b_N = 1$:

$$u(x) = Tu(x) \equiv \int_{IR^N} \frac{g(x,y,u(y))}{|y-x|^\sigma} dy, \quad \forall x \in IR^N.$$

Khi đó ta có kết quả chính như sau.

Định lý 1. *Giả sử* $g: IR^{2N} \times IR_+ \to IR$ *là hàm liên tục sao cho tồn tại các hằng số* $M > 0, \alpha, \beta, \gamma \ge 0, 0 < \sigma < \min\{N, N + \beta - \gamma\}, N \ge 2$ *thỏa*

$$g(x,y,u) \ge M \frac{|y|^\beta u^\alpha}{(1+|x|)^\gamma}, \ \forall x, y \in IR^N, \ \forall u \ge 0.$$

Nếu $0 \le \alpha \le (\beta + N)/(\sigma + \gamma)$, *thì phương trình tích phân* (1) *không có nghiệm liên tục dương.*

Chú thích 1. Kết quả của định lý nầy mạnh hơn kết quả trong[3, 8]. Thật vậy, tương ứng với cùng phương trình (5), các giả thiết sau đây đã sử dụng trong [3, 8] không cần thiết ở đây

(G_1) $g(y,u)$ không giảm đối với biến u, i.e.,

$(g(y,u)-g(y,v))(u-v)\geq 0,\ \forall u,v\geq 0,\ \forall y\in IR^N.$

(G_2) Tích phân $\int_{IR^N} \frac{g(y,0)}{(1+|y|)^{N-1}}\,dy$ tồn tại và dương.

Chứng minh định lý 1 chủ yếu cần bổ đề sau đây mà chi tiết chứng minh có thể tìm thấy trong[10].

Bổ đề 1. *Với mỗi* $p\geq 0,\ q\geq 0,\ 0<\sigma<N,\ x\in IR^N$. *Đặt*

$$A[p,q](x)=\int_{IR^N} \frac{|y|^p(1+|y|)^{-q}}{|y-x|^{\sigma}}\,dy.$$

Khi đó ta có

$A[p,q](x)=+\infty,$ *nếu* $q-p\leq N-\sigma,$

$A[p,q](x)$ *hội tụ và*

$$A[p,q](x)\geq \left(\frac{1}{N+p}+\frac{1}{q}\right)\frac{\omega_N}{2^{\sigma}}\frac{|x|^{p+N-\sigma}}{(1+|x|)^q},$$

nếu $q-p>N-\sigma,$ *trong đó* ω_N *là diện tích của mặt cầu đơn vị trong* IR^N.

Chứng minh định lý 1. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử rằng tồn tại một nghiệm dương liên tục $u(x)$ của phương trình tích phân (1). Bằng cách biện luận 3 trường hợp khác nhau của α :

(i) $0\leq\alpha\leq(\beta+N-\sigma)/(\sigma+\gamma),$

(ii) $(\beta+N-\sigma)/(\sigma+\gamma)<\alpha<(\beta+N)/(\sigma+\gamma),$

(iii) $\alpha=(\beta+N)/(\sigma+\gamma),$

Kết hợp với bổ đề 1, chúng ta suy ra điều mâu thuẩn và do đó định lý 1 được chứng minh xong.
Dựa vào định lý 1, ta có kết quả chính như sau.

Định lý 2. (Ruy[13]). *Cho* $g: IR^N\times IR_+\to IR$ *là hàm liên tục thỏa điều kiện:* *Tồn tại các hằng số* $\alpha,\beta\geq 0,\ M>0,\ 0<\sigma<\beta+N,\ N\geq 2$ *sao cho*

$$g(y,u)\geq M|y|^{\beta}u^{\alpha},\ \forall y\in IR^N,\ \forall u\geq 0.$$

Nếu $0\leq\alpha\leq(\beta+N)/\sigma$ *thì phương trình tích phân*

$$u(x)=\int_{IR^N}\frac{g(y,u(y))}{|y-x|^{\sigma}}dy,\ \forall x\in IR^N,$$

không có nghiệm liên tục dương.

Cụ thể với $g(x,y,u)=|y|^{\beta}u^{\alpha}$, ta có kết quả sau.

Định lý 3. *Giả sử các hằng số* $\beta \geq 0, \sigma > 0$ *thỏa điều kiện* $0 < \sigma < \beta + N,\ N \geq 2.$ *Nếu* $0 \leq \alpha \leq (\beta + N)/\sigma$ *thì phương trình tích phân:*

$$u(x) = \int_{IR^N} \frac{|y|^\beta u^\alpha(y)}{|y-x|^\sigma} dy,\ \ \forall x \in IR^N,$$

không có nghiệm liên tục dương.

Chú thích 2.

a) Trong trường hợp $\alpha = \dfrac{N}{\sigma},\ \sigma = N-1,\ N = 2,$ một số đánh giá thu được ở đây đơn giản hơn trong [2].

b) Trong trường hợp $g(y,u)$ ta chưa kết luận về $\alpha > N/(N-1),\ N \geq 2.$ Tuy nhiên, khi $g(y,u) = u^\alpha,\ N \geq 2,\ N/(N-1) \leq \alpha < (N+1)/(N-1),$ B. Hu [7] đã chứng minh rằng bài toán (3), (4), (9) không có nghiệm dương. Trong trường hợp "*giới hạn* "$\alpha = (N+1)/(N-1),$ thì nghiệm dương tồn tại (xem [5, 7]). Trường hợp đặc biệt với $\alpha = (N+1)/(N-1),$ các tác giả trong [5] đã cho dạng tường minh của tất cả các nghiệm không âm không tầm thường $u \in C^2(IR_+^{N+1}) \bigcap C(\overline{IR_+^{N+1}})$ của bài toán

$$\begin{cases} -\Delta u = a u^{\alpha + \frac{2}{N-1}} & trong \quad IR_+^{N+1}, \\ -u_{x_{N+1}}(x', 0) = b u^\alpha (x', 0) & trên \quad x_{N+1} = 0. \end{cases}$$

Các tác giả trong [5] đã chứng minh các kết quả sau:

(i) Nếu $a > 0$ hay $a \leq 0,\ b > B = \sqrt{a(1-N)/(N+1)},$ thì

$$u(x) = C\left(\beta + \left|x - x^0\right|^2\right)^{(1-N)/2}$$

với các hằng số $C > 0,\ \beta \in IR$ nào đó và $x^0 = (x_1^0, ..., x_{N+1}^0) \in IR^{N+1},$ trong đó $x_1^0 = \dfrac{b}{N-1} C^{2/(N-1)}$ và $\beta = \dfrac{a}{N^2 - 1} C^{4/(N-1)}.$

(ii) Nếu $a = b = 0,$ thì $u(x) = C$ với $C > 0$ là hằng số nào đó.

(iii) Nếu $a = 0, b < 0,$ thì $u(x) = Cx_1 + \left(\dfrac{-C}{b}\right)^{(N-1)/(N+1)}$ với $C > 0$ nào đó.

(iv) Nếu $a < 0, b = B,$ thì $u(x) = \left(\dfrac{2B}{N-1} x_1 + C\right)^{(1-N)/2}$ với $C > 0$ nào đó.

(v) Nếu $a < 0$ và $b < B,$ thì bài toán không tồn tại nghiệm không âm không tầm thường.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nghiêm Thị Vân Anh**,** *Sự không tồn tại nghiệm dương của một số phương trình tích phân phi tuyến liên kết với bài toán Neumann trong nửa không gian trên*, Luận văn Thạc sỹ, trường Đại học KHTN Tp. HCM. (2004). 54 trang.

[2] F.V. Bunkin, V.A. Galaktionov, N.A. Kirichenko, S.P. Kurdyumov, A.A. Samarsky, *On a nonlinear boundary value problem of ignition by radiation*, J. Comp. Math. Phys. **28** (1988), pp.549-559 (Russian).

[3] Dương Thị Thanh Bình, Trần Ngọc Diễm, Đinh Văn Ruy, Nguyễn Thành Long, *On a nonexistence of positive solution of a nonlinear Neumann problem in half-space* IR_+^n, Demonstratio Math. **31** (1998), pp.773-782.

[4] Dương Thị Thanh Bình, Nguyễn Thành Long, *On the nonexistence of positive solution of Laplace equation in half-space* IR_+^n *with a nonlinear Neumann boundary condition*, Demonstratio Math. **33** (2000), pp.365-372.

[5] M. Chipot, I. Shafrir, M. Fila, *On the solutions to some elliptic equations with nonlinear Neumann boundary conditions*, Advances in Diff. Equ.**1** (1996), pp.91-110.

[6] B. Hu, H.M. Yin, *The profile near blow-up time for solution of the heat equation with a nonlinear boundary condition*, Transactions of AMS. **346** (1994), pp.117-135.

[7] B. Hu, *Nonexistence of a positive solution of the Laplace equation with a nonlinear boundary condition*, J. Diff. and Int. Equ. **7** (1994), pp.301-313.

[8] Nguyễn Thành Long, Đinh Văn Ruy, *On a nonexistence of positive solution of Laplace equation in upper half-space with Cauchy data*, Demonstratio Math. **28** (1995), pp.921-927.

[9] Nguyễn Thành Long, Dương Thị Thanh Bình, *On the nonexistence of positive solution of a nonlinear integral equation*, Demonstratio Math. **34** (2001), pp.837-845.

[10] Nguyễn Thành Long, Đinh Văn Ruy, *On the nonexistence of positive solution of some integral equation*, Demonstratio Math. **36** (2003), No.2, pp.393-404.

[11] Đinh Văn Ruy, Nguyễn Thành Long, Dương Thị Thanh Bình, *On a nonexistence of positive solution of Laplace equation in upper half-space*, Demonstratio Math. **30** (1997), pp.7-14.

[12] Nguyễn Thành Long, *On the nonexistence of positive solution of some singular nonlinear integral equations*, J. Inequalities and Applications, Hindawi Publishing Corporation (2005) (to appear).

[13] Đinh Văn Ruy, *Một định lý không tồn tại nghiệm dương của phương trình tích phân* $u(x) = \int\limits_{IR^N} \frac{g(y,u(y))}{|y-x|^\sigma}\, dy$, Tạp chí Phát Triển Khoa học Công Nghệ ĐHQG Tp. HCM, Vol.**5**, No.3 (2002), pp.5-10.