ỨNG DỤNG PHẦN TỬ METIS TÍNH DAO ĐỘNG DẦM CÓ VẾT NỨT THỞ
ANALYSIS VIBRATION OF BEAM WITH A BREATHING CRACK USING METIS FINITE ELEMENT MODEL

Trần Thị Kim Huê

Khoa Kỹ thuật công trình, Trường ĐH Bán công Tôn Đức Thắng, Tp. Hồ Chí Minh, Việt Nam

ABSTRACT

In this paper, we base on the concept of "metis finite element", which is proposed by Professor Nguyen Dang Hung, to model the cracked beam. Then we apply a breathing cracked beam vibration theory to determine the effect of the breathing crack on the lowest natural frequencies. The results are used for comparison with analytical results and experimental results [1].

1. GIỚI THIỆU

Vấn đề tính toán dao động của dầm có vết nứt đã được đề cập đến từ rất lâu, tuy nhiên hầu hết các giả thuyết tính tóan đều cho rằng: vết nứt trên các bộ phận của kết cấu là vết nứt " mở" (open) và nó sẽ luôn mở trong suốt quá trình dao động. Giả thuyết này đã loại bỏ thuộc tính phi tuyến của vết nứt. Bởi vì trong một chu kỳ dao động, vết nứt không phải lúc nào cũng mở, sự đóng mở vết nứt theo thời gian phụ thuộc vào điều kiện tải trọng và biên độ dao động.

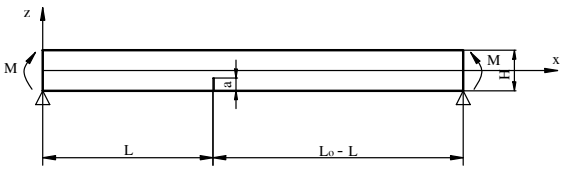
Ảnh hưởng của vết nứt "thở" (the breathing crack) lên dao động của kết cấu đã từng được ghi nhận từ rất lâu. Năm 1944, Kirmsher [1] qua các thí nghiệm nhận thấy rằng: nếu vết nứt trong dầm bêtông được lấp đầy bởi tạp chất hoặc các vật liệu kim loại, hay hai mép vết nứt đủ gần để xuất hiện sự tiếp xúc giữa chúng thì sự ảnh hưởng của vết nứt trong trường hợp này tương tự như khi chiều sâu vết nứt giảm đi. Những ghi nhận này đã đặt nền tảng cho sự phát triển một cách hệ thống hơn ảnh hưởng của sự đóng mở vết nứt lên dao động của kết cấu.

2. CƠ SỞ LÍ THUYẾT

2.1. Lí thuyết dao động của dầm có vết nứt thở

2.1.1. Phương trình dao động của dầm có vết nứt mở ở cạnh

Xét dầm Euler-Bernoulli liên kết tựa đơn ở hai đầu, có chiều dài L_o, mặt cắt ngang tiết diện hình chữ nhật chiều cao h, chiều rộng b, có vết nứt mở trên bề mặt dầm như hình 1.



Hình 1: Dầm tựa đơn có vết nứt cạnh

Ta có phương trình dao động tổng quát [1][2]:

$$c_0^2\left[(I_7 w)^{iv}\right] + I_7 \ddot{w} = 0 \qquad (1-1)$$

Trong đó:

$c_0^2 = EI/(\rho A)$: hằng số vật liệu

I : moment quán tính của tiết diện.

E : mođun đàn hồi Young

ρ : khối lượng riêng của vật liệu

A: diện tích tiết diện ngang dầm

$$I_7 = \int_A (1+f)dA$$

$$f = -6\pi(1-\nu^2)h^2\Phi_I(\alpha)(x-L)^2 / [zL_0(L_0{}^2 + \nu h^2/4)]$$

$$\Phi_I(\alpha) = 0.6272\alpha^2 - 1.04533\alpha^3 + 4.5948\alpha^4 - 9.9736\alpha^5 + 20.2948\alpha^6 - 33.0351\alpha^7 + 47.1063\alpha^8 - 40.7556\alpha^9 + 19.6\alpha^{10}$$

α = a/h.

w(x,t): hàm chuyển vị

Nếu vết nứt biến mất khỏi dầm thì phương trình dao động trên được viết lại như sau:

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + A\rho\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (1-2)$$

2.1.2. Tần số tự nhiên của dầm có vết nứt mở ở cạnh

Cho dầm đang xét ở trên dao động tự do. Nếu giả thuyết rằng, mọi điểm trên dầm đều dao động điều hòa với tần số vòng w và biên độ dao động là W(x) thì lời giải tổng quát của phương trình (1-1) có thể viết dưới dạng:

$$w(x,t) = W(x)\,T(t) \qquad (1-3)$$

Với: T(t) là hàm thời gian.

Thay (1-3) vào (1-1) ta được:

$$c_0^2\left\{\partial^4\left[\frac{I_7(x)W(x)}{\partial x^4}\right]\right\}T(t) + [I_7(x)W(x)]\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0 \qquad (1-4)$$

Hoặc có thể tách phương trình (1-4) thành hai phương trình riêng biệt:

$$[I_7(x)W(x)]^{iv} + \left(\frac{\omega_n^*}{c_0}\right)^2[I_7(x)W(x)] = 0 \qquad (1-5)$$

$$\ddot{T} + \omega_n^{*2}T = 0 \qquad (1-6)$$

Trong đó:

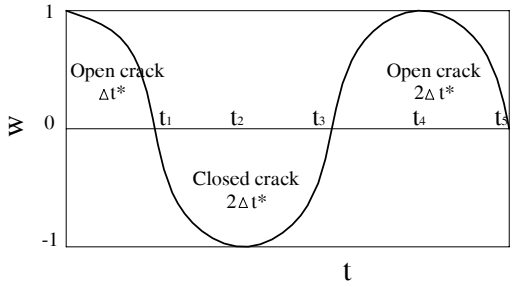
$\omega_n^* = c_0\beta_n^{*2}$: là tần số tự nhiên của dầm có vết nứt

β_n^*: lời giải chính xác của tần số tự nhiên, được xác định trực tiếp bằng cách giải phương trình:

$$I_7'(L_0)/I_7(L_0)[\cos(\beta_n^*L_0) - \sin(\beta_n^*L_0)\coth(\beta_n^*L_0)] + \beta_n^*\sin(\beta_n^*L_0) = 0 \qquad (1-7)$$

2.1.3. Lí thuyết tính tóan vết nứt thở

Trong giới hạn nghiên cứu này, vết nứt thở được giả thuyết chỉ có hai trạng thái: hoặc đóng hòan tòan hoặc mở hòan tòan và tần số không phụ thuộc vào biên độ dao động. Đồng thời sự chuyển đổi từ nửa chu kỳ mở sang đóng và ngược lại chỉ xuất hiện tại thời điểm dầm trở về dạng không biến dạng.



Hình 2: Sự thay đổi trạng thái vết nứt của dầm tựa đơn có vết nứt cạnh tại giữa nhịp (Mode dao động thứ nhất)

Chu kì dao động của dầm có vết nứt thở :

$$T = 2(\Delta t^* + \Delta t) \qquad (1-8)$$

Tần số dao động:

$$\omega_b = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2(\Delta t^* + \Delta t)} \qquad (1-9)$$

hoặc:

$$\frac{\omega_b}{\omega_1} = 2\frac{\omega_1^*/\omega_1}{1+\omega_1^*/\omega_1} \qquad (1-10)$$

Trong đó:

w_b : tần số dao động khi dầm có vết nứt thở

w_1 : tần số dao động khi dầm không có vết nứt (tức là tương ứng với nửa chu kì vết nứt đóng lại)

ω_1^* : tần số khi dầm có vết nứt mở

2.2. Phương pháp phần tử chuyển vị Metis

Hàm định nghĩa phần tử chuyển vị Metis [3][4]:

$$\Pi(\sigma^e, u^k) = \frac{1}{2}\beta(\sigma^e) - (\sigma^e, u^k) + (\bar{\sigma}, u^k) \qquad (2\text{-}1)$$

Trong đó:

$$\beta(\sigma^e) = \int B(\sigma_{ij}^e)dV$$

$$(\sigma^e, u^k) = \int n_j \sigma_{ij}^e u_i^k dS$$

$$(\bar{\sigma}, u^k) = \int n_j \bar{\sigma_{ij}} u_i^k dS_\sigma$$

$B(\sigma_{ij}^e)$: hàm mật độ năng lượng biến dạng bù

σ^e: trường ứng suất cân bằng

u^k : trường chuyển vị khả dĩ động

2.2.1.Mô hình phần tử chuyển vị đẳng tham số Metis

Công thức biến phân của phần tử Metis [3][4]:

$$\Pi_{MD} = \sum_{m=1}^{N}\{\int_{V_m}\frac{1}{2}B(\sigma_{ij})dV - \int_{V_m}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV + \int_{V_m}\bar{F_i}u_j dV\} \qquad (2\text{-}2)$$

Ta có thể viết lại dưới dạng ma trận như sau :

$$\Pi_{MD} = \sum_{m=1}^{n}\{\int_{V_m}\frac{1}{2}\sigma^T B\sigma dV - \int_{V_m}\sigma^T\varepsilon dV + \int_{V_m}\bar{F}udV\} \qquad (2\text{-}3)$$

hoặc:

$$\Pi_{MD} = \sum_{m=1}^{k}\Pi_{MD}^R + \sum_{m=k+1}^{n}\Pi_{MD}^S \qquad (2\text{-}4)$$

Trong đó :

k: là số phần tử regular trong kết cấu

$$\Pi_{MD}^R = \frac{1}{2}b_1^T H_1 b_1 - b_1^T L_1 q + F^T q : \qquad (2\text{-}5)$$

hàm năng lượng regular

$$\Pi_{MD}^S = \frac{1}{2}b_1^T H_1 b_1 + \frac{1}{2}b_2^T H_2 b_2 + b_1^T H_{12} b_2 - b_1^T L_1 q - b_2^T L_2 q + F^T q \qquad :(2-6)$$

hàm năng lượng singular

$$H_2 = \int_V S_2^T B S_2 dV \qquad H_1 = \int_V S_1^T B S_1 dV$$

$$H_{12} = \int_V S_1^T B S_2 dV \qquad L_1 = \int_V S_1^T G dV$$

$$L_2 = \int_V S_2^T G dV$$

$$B = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\upsilon & 0 \\ -\upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\upsilon) \end{bmatrix}$$

$$G^T = \left[\frac{\partial N}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x}\right]$$

N_i: các hàm dạng của phần tử đẳng tham số 8 nút

$$[S_1] = \begin{bmatrix} ... & n_i(n_i-1)x^{m-n}y^{n-2} & ... \\ ... & (m_i-n_i)(m_i-n_i-1)x^{m-n-2}y^{n} & ... \\ ... & n_i(n_i-m_i)x^{m-n-1}y^{n-1} & ... \end{bmatrix}$$

:hàm ứng suất regular

$$[S_2] = \frac{1}{4\sqrt{r}} \begin{bmatrix} 3\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{5\theta}{2} & -7\sin\frac{\theta}{2}-\sin\frac{5\theta}{2} \\ 5\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{5\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{5\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{5\theta}{2} & 3\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{5\theta}{2} \end{bmatrix}$$

: hàm ứng suất singular

$F = -M\ddot{q}$: lực quán tính

2.2.2. Ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của phần tử Metis

* Ma trận độ cứng phần tử [3][4]:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_1^e & K_{12}^e \\ K_{12}^{eT} & K_2^e \end{bmatrix} \quad (2\text{-}7)$$

* Ma trận khối lượng phần tử [12]:

$$M_1^e = \rho \int_V N_e^T N_e dV \quad (2\text{-}8)$$

Với:

$K_1^e = L_1^T H_1^{-1} L_1$: phần regular của ma trận độ cứng phần tử.

$K_{12}^e = L_2^T - L_1^T H_1^{-1} H_{12}$: phần coupling của ma trận độ cứng phần tử.

$K_2^e = H_{12}^T H_1^{-1} H_{12} - H_2$: phần singular của ma trận độ cứng phần tử.

N_e: ma trận các hàm dạng

ρ: khối lượng riêng của vật liệu

2.3. Tính tần số tự nhiên

Để xác định tần số tự nhiên của dầm không có vết nứt cũng như dầm có vết nứt, ta giải phương trình sau [5]:

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad (2\text{-}9)$$

Trong đó:

$K = \begin{bmatrix} K_1 & \cdots & K_{12} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ K_{12}^T & \cdots & K_2 \end{bmatrix}$: ma trận độ cứng toàn kết cấu

$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$: ma trận khối lượng toàn kết cấu

Sau đó tính đổi sang tần số β để tiện so sánh với lời giải giải tích:

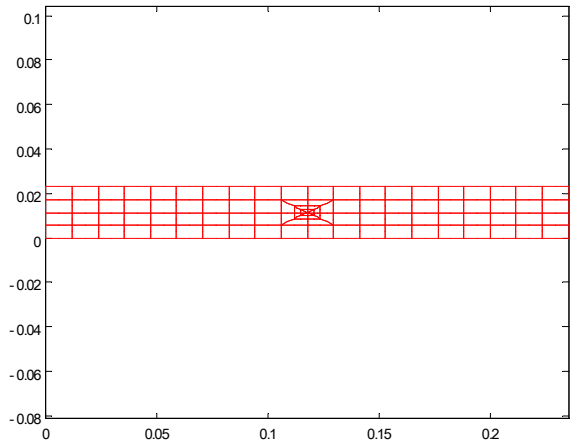
$$\beta = \left(\omega^2 \frac{\rho F L^4}{EI} \right)^{0.25} \quad (2\text{-}10)$$

Tất cả quá trình tính toán được thực hiện bởi chương trình viết bằng ngôn ngữ Matlab.

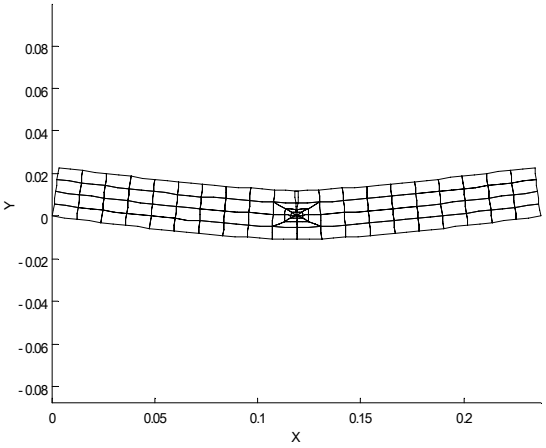
3. KẾT QUẢ TÍNH TÓAN

Tiến hành tính toán với các mẫu thí nghiệm là dầm có vết nứt tại giữa nhịp, chiều sâu vết nứt thay đổi từ 10% đến 50% chiều cao mặt cắt ngang dầm [1]. Các thông số kỹ thuật của dầm như sau:

Boundary condition	Support
Material	Aluminium
Young's modulus, E	7.2E+10 N/m^2
Mass density, ρ	2800 kg/m^3
The Poisson ratio, n	0.3
Beam length, L	235 mm
Beam width, B	23 mm
Beam depth, H	7 mm



Hình 3: Mô hình hóa dầm bằng phần tử Metis



Hình 4: Dạng dao động thứ 1 của dầm (kết quả từ Matlab)

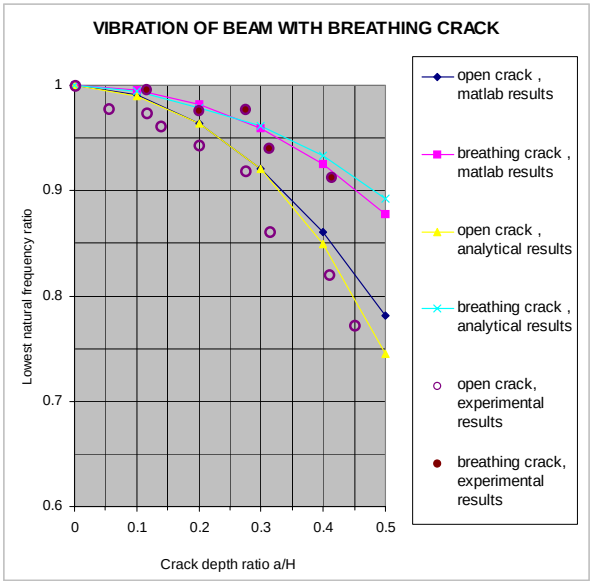
Kết quả tính toán từ chương trình Matlab

Depth a/ H	*lowest natural frequency*			*frequency ratio*	
	without crack w_1	***open crack*** w^*_1	***breathing crack*** w_b	***open crack*** (w^*_1/w_1)	***breathing crack*** (w_b/w_1)
0	913.99	913.99	913.99	1	1
0.1	913.99	905.36	909.65	0.99056	0.99526
0.2	913.99	880.77	897.07	0.96366	0.98149
0.3	913.99	841.44	876.22	0.92063	0.95867
0.4	913.99	786.30	845.35	0.86029	0.92490
0.5	913.99	713.93	801.67	0.78112	0.87711

So sánh

Solution	***the lowest natural frequency ratio of the open crack , (w^*_1/w_1)***					
	Depth a/H					
	0	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**
Analysis	1.000	0.9898	0.9641	0.9210	0.8497	0.7449
Matlab	1.000	0.9906	0.9637	0.9206	0.8603	0.7811
Tolerance (%)	***0.000***	***-0.077***	***0.046***	***0.040***	***-1.247***	***-4.862***

Solution	***the lowest natural frequency ratio of the breathing crack , (w_b/w_1)***					
	Depth a/H					
	0	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**
Analysis	1.000	0.9946	0.9790	0.9611	0.9329	0.8922
Matlab	1.000	0.9953	0.9815	0.9587	0.9249	0.8771
Tolerance (%)	***0.000***	***-0.066***	***-0.255***	***0.252***	***0.857***	***1.692***



Hình 5: So sánh các kết quả giải tích, thí nghiệm, Matlab

4. NHẬN XÉT, KẾT LUẬN

Sự chênh lệch giữa kết quả tính toán trong Matlab với lời giải giải tích và kết quả thí nghiệm là không đáng kể. Đồng thời thời gian tính toán bằng Matlab được rút ngắn rất nhiều do một ưu điểm nổi bật của mô hình phần tử Metis là nhờ vào thuộc tính suy biến của phần tử nên cho kết quả hội tụ nhanh, mức độ chính xác của lời giải phụ thuộc rất ít vào việc chia lưới. Vì vậy việc sử dụng phần tử Metis trong bài toán tính dao động cho các kết cấu có vết nứt là phù hợp.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. T.G.Chondros, - *Vibration of beam with a breathing crack* -, Journal of Sound and Vibration,2001.
2. R.I. Actis and A.D. Dimarogonas, - *Non-linear effects due to closing cracks in vibrating beams* -, 12th ASME Conference on Mechanical Engineering, Vibration and noise, Montreal, Canada,1989.
3. Tran Thanh Ngoc, - *Analysis of plate and shell problem with or without fissure using metis element model* -, Master thesis, Universit de Lige, 2001.
4. Dang Dinh Thi, - *A metis displacement finite element analysis* -, Master thesis, Universit de Lige, 1999.
5. Daniel Rixen and Doan Duc Bao, - *Dynamics of structures and mechanical vibrations* -2002.
6. J.F. Debongnie, - *Lectures notes on Finite Element Method* -, Universit de Lige, Facult des Sciences Appliques, Institut de Mchanique, 1998.
7. S. Christides and A.D.S. Barr, - *One-dimentional theory of cracked Bernoulli-Euler beams* -, International Journal Mechanics, 1984.
8. T.G.Chondros , A.D. Dimarogonas and Yao, - *A continuous cracked beam vibration theory*-, International Journal Mechanics, 1984.
9. Nguyen Dang-Hung, - *Course de Mchanique de la Rupture* -, Universit de Lige.
10. Nguyen Dang-Hung, Dang Dinh Thi, - *Invariant isoparametric metis displacement elements* -, Nha Trang 2000 International Colloquiem.
11. Tran Hien,- *Gθ method applied to crack propagation modeling through some 2D metis element mesh* -, Master thesis, Universit de Lige, 2003.
12. Tran Thi Kim Hue,- *Effect of breathing cracks on the natural frequencies*-, Master thesis, Universit de Lige, 2004.