VỀ PHƯƠNG TRÌNH SÓNG PHI TUYẾN: $U_{tt} - U_{xx} = f(x,t,U,U_x,U_t)$: XẤP XỈ TUYẾN TÍNH VÀ KHAI TRIỂN TIỆM CẬN
ON THE NONLINEAR WAVE EQUATION: $U_{tt} - U_{xx} = f(x,t,U,U_x,U_t)$: LINEAR APPROXIMATION AND ASYMPTOTIC EXPANSION

Nguyễn Thị Thảo Trúc* , Nguyễn Công Tâm** , Nguyễn Thành Long **

* Bộ môn Toán, Khoa Sư Phạm, Đại học Cần Thơ, Việt nam
E-mail: ntthaotruc@ctu.edu.vn
** Khoa Toán-tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên T.P. Hồ Chí Minh, Việt nam
E-mail: longnt@hcmc.netnam.vn

BẢN TÓM TẮT

Trong báo cáo này, chúng tôi xét phương trình sóng phi tuyến sau đây

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t,u,u_x,u_t),\ x \in \Omega = (0,1),\ 0 < t < T, \qquad (1)$$
$$u_x(0,t) - h_0 u(0,t) = g_0(t),\ u(1,t) = g_1(t), \qquad (2)$$
$$u(x,0) = \tilde{u}_0(x),\ u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \qquad (3)$$

trong đó $h_0 \geq 0$ là một hằng số trước và f, g_0, g_1, $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$ là các hàm số cho trước. Trong báo cáo này, chúng tôi liên kết bài toán (1)-(3) một dãy qui nạp tuyến tính mà sự tồn tại và duy nhất nghiệm địa phương được chứng minh bằng phương pháp compact thông dụng. Trong trường hợp $g_0, g_1 \in C^3(IR_+)$, $f \in C^{N+1}([0,1] \times IR_+ \times IR^3)$, $f_1 \in C^N([0,1] \times IR_+ \times IR^3)$, chúng tôi thu được từ phương trình $u_{tt} - u_{xx} = f(x,t,u,u_x,u_t) + \varepsilon f_1(x,t,u,u_x,u_t)$, liên kết với (2), (3) một nghiệm yếu $u_\varepsilon(x,t)$ có một khai triển tiệm cận cấp $N+1$ theo ε, với ε đủ nhỏ.

ABSTRACT

In this report we consider the following nonlinear wave equation

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t,u,u_x,u_t),\ x \in \Omega = (0,1),\ 0 < t < T, \qquad (1)$$
$$u_x(0,t) - h_0 u(0,t) = g_0(t),\ u(1,t) = g_1(t), \qquad (2)$$
$$u(x,0) = \tilde{u}_0(x),\ u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \qquad (3)$$

where $h_0 \geq 0$ is a given constant and f, g_0, g_1, $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$ are given functions. In this report we associate with problem (1)-(3) a linear recursive scheme for which the existence of a local and unique solution is proved by using standard compactness argument. In case of $g_0, g_1 \in C^3(IR_+)$, $f \in C^{N+1}([0,1] \times IR_+ \times IR^3)$, and $f_1 \in C^N([0,1] \times IR_+ \times IR^3)$, we obtain from the following equation $u_{tt} - u_{xx} = f(x,t,u,u_x,u_t) + \varepsilon f_1(x,t,u,u_x,u_t)$, associated to (2), (3) a weak solution $u_\varepsilon(x,t)$ having an asymptotic expansion of order $N+1$ in ε, for ε sufficiently small.

1. MỞ ĐẦU

Trong báo cáo này, chúng tôi xét phương trình sóng phi tuyến sau đây

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t,u,u_x,u_t),\ x \in \Omega = (0,1),\ 0 < t < T, \qquad (1)$$

liên kết với điều kiện biên hỗn hợp không thuần nhất

$$u_x(0,t) - h_0 u(0,t) = g_0(t),\ u(1,t) = g_1(t), \qquad (2)$$

và điều kiện đầu

$$u(x,0) = \widetilde{u}_0(x),\ u_t(x,0) = \widetilde{u}_1(x), \qquad (3)$$

trong đó h_0 là hằng số không âm cho trước và f, g_0, g_1, $\widetilde{u}_0$, $\widetilde{u}_1$ là các hàm cho trước.

Phương trình (1) với các dạng khác nhau của f và các điều kiện khác nhau đã được khảo sát bởi nhiều tác giả. Cụ thể là một số trường hợp sau:

Trong [4] Ficken và Fleishman đã thiết lập sự tồn tại và duy nhất nghiệm toàn cục và tính ổn định của nghiệm này cho phương trình

$$u_{tt} - u_{xx} - 2\alpha_1 u_t - \alpha_2 u = \varepsilon u^3 + b, \quad \varepsilon > 0 \text{ bé}. \qquad (4)$$

Trong [11] Rabinowitz đã chứng minh sự tồn tại của nghiệm tuần hoàn cho phương trình

$$u_{tt} - u_{xx} + 2\alpha_1 u_t = \varepsilon f(x,t,u,u_x,u_t), \qquad (5)$$

trong đó ε là tham số bé và f tuần hoàn theo thời gian.

Trong [1] Caughey và Ellison đã hợp nhất các trường hợp trước đó để bàn về sự tồn tại duy nhất và ổn định tiệm cận của các nghiệm cổ điển cho một lớp các hệ động lực liên tục phi tuyến. Trong [2] Định đã chứng minh sự tồn tại và duy nhất của một nghiệm yếu của bài toán (1), (3) liên kết với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad (6)$$

với số hạng phi tuyến trong (0.1) có dạng

$$f = \varepsilon f(t,u). \qquad (7)$$

Bằng sự tổng quát của [3] Định và Long đã xét bài toán (1), (3), (6) với số hạng phi tuyến có dạng

$$f = f(t,u,u_t), \qquad (8)$$

Trong [5, 6] Định và Long đã nghiên cứu bài toán (1), (3) với số hạng phi tuyến có dạng

$$f = f(u,u_t). \qquad (9)$$

Trong [5] các tác giả đã xét bài toán với điều kiện biên hỗn hợp không thuần nhất

$$u_x(0,t) = hu(0,t) + g(t), \quad u(1,t) = 0, \qquad (10)$$

trong đó $h > 0$ là hằng số cho trước; trong [6] với điều kiện biên được xét tổng quát hơn

$$u_x(0,t) = g(t) + h\,u(0,t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds, \quad u(1,t) = 0. \qquad (11)$$

Trong [7] Long và Diễm đã xét bài toán (1), (3) với trường hợp

$$u_x(0,t) - h_0 u(0,t) = u_x(1,t) + h_1 u(1,t) = 0, \qquad (12)$$

trong đó h_0, h_1 là hằng số không âm cho trước với $h_0 + h_1 > 0$.

Trong phần thứ nhất chúng tôi liên kết với phương trình (0.1) một dãy qui nạp tuyến tính bị chặn trong một không gian hàm thích hợp. Sự tồn tại nghiệm của (1), (2), (3), (12) được chứng minh bằng phương pháp Galerkin và compat yếu. Chú ý rằng phương pháp tuyến tính hóa trong các bài báo [3, 7] không dùng được trong các bài báo [5, 6]. Phần thứ hai chúng tôi nghiên cứu các khai triển tiệm cận của nghiệm theo một tham số nhiễu ε cho bài toán sau:

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} u_{\varepsilon tt} - \Delta u_\varepsilon = f(x,t,u_\varepsilon,u_{\varepsilon x},u_{\varepsilon t}) \\ \qquad\qquad + \varepsilon f_1(x,t,u_\varepsilon,u_{\varepsilon x},u_{\varepsilon t}), \; 0 < x < 1,\, 0 < t < T, \\ u_{\varepsilon x}(0,t) - h_0 u_\varepsilon(0,t) = g_0(t), \; u_\varepsilon(1,t) = g_1(t), \\ u_\varepsilon(x,0) = \tilde{u}_0(x), \; u_{\varepsilon t}(x,0) = \tilde{u}_1(x). \end{cases}$$

Nếu các hàm số $f \in C^{N+1}([0,1] \times IR_+ \times IR^3)$, $f_1 \in C^N([0,1] \times IR_+ \times IR^3)$, và một số điều kiện phụ, thì nghiệm u_ε của bài toán (P_ε) có một khai triển tiệm cận đến cấp $N+1$ theo ε, với ε đủ nhỏ. Các kết quả trên đã tổng quát hóa tương đối của [2, 3, 7-10].

2. THUẬT GIẢI XẤP XỈ TUYẾN TÍNH

Ta đặt

$$V = \{v \in H^1(0,1) : v(1) = 0\}, \qquad a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + h_0 u(0)v(0).$$

Ta thành lập các giả thiết sau

(H_1) $\quad h_0 \ge 0;$

(H_2) $\quad g_0, g_1 \in C^3(IR_+);$

(H_3) $\quad \tilde{u}_0 \in V \cap H^2, \quad \tilde{u}_1 \in V;$

(H_4) $\quad f \in C^1([0,1] \times IR_+ \times IR^3)$ thỏa các điều kiện sau

$$f(1,t,u,v,w) = 0 \text{ với mọi } t \ge 0 \text{ và } (u,v,w) \in IR^3.$$

Thay vì xét bài toán (1)-(3), ta sẽ xét đưa nó về một bài toán với điều kiện biên thuần nhất

$$v_{tt} - v_{xx} = \tilde{f}(x,t,v,v_x,v_t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \quad (13)$$
$$v_x(0,t) - h_0 v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad (14)$$
$$v(x,0) = \tilde{v}_0(x),\ v_t(x,0) = \tilde{v}_1(x), \quad (15)$$
trong đó, ẩn hàm cũ u và ẩn hàm mới v liên hệ bởi phép đổi ẩn

$$v(x,t) = u(x,t) - \varphi(x,t), \quad (16)$$
$$\varphi(x,t) = \frac{1}{1+h_0}(x-1)g_0(t) + e^{h_0(x-1)}g_1(t),\ x \in [0,1],\ t \ge 0. \quad (17)$$
Số hạng phi tuyến và giá trị ban đầu cũ và mới cũng liên hệ bởi

$$\tilde{f}(x,t,v,v_x,v_t) = f(x,t,v+\varphi,v_x+\varphi_x,v_t+\varphi_t) + \varphi_{xx} - \varphi_{tt}, \quad (18)$$

$$\tilde{v}_0(x) = \tilde{u}_0(x) - \varphi(x,0),\ \tilde{v}_1(x) = \tilde{u}_1(x) - \varphi_t(x,0), \quad (19)$$
cùng với điều kiện nhất quán

$$\begin{aligned} g_0(0) &= u_x(0,0) - h_0 u(0,0) = \tilde{u}_0'(0) - h_0\tilde{u}_0(0), \\ g_1(0) &= u(1,0) = \tilde{u}_0(1). \end{aligned} \quad (20)$$
Ta cũng có

$$\tilde{f} \in C^1([0,1]\times IR_+ \times IR^3),\ \tilde{v}_0 \in V \cap H^2,\ \tilde{v}_1 \in V.$$

Vậy với phép đổi ẩn hàm (16), (17), bài toán (1)-(3) với điều kiện biên không thuần nhất tương đương với bài toán với điều kiện biên thuần nhất (13)-(15).
Cho trước $M > 0,\ T > 0,$ ta đặt

$$K_0 = K_0(M,T,\tilde{f}) = \sup\{|\tilde{f}(x,t,u,v,w)| : (x,t,u,v,w) \in \tilde{A}\}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} K_1 &= K_1(M,T,\tilde{f}) \\ &= \sup\{(|\tilde{f}_x'| + |\tilde{f}_u'| + |\tilde{f}_v'| + |\tilde{f}_w'|)(x,t,u,v,w) : (x,t,u,v,w) \in \tilde{A}\}, \end{aligned} \quad (22)$$

trong đó $\tilde{A} = \{(x,t,u,v,w) \in IR^5 : 0 \le t \le T,\ 0 \le x \le 1,\ |u| + |v| + |w| \le M\}. \quad (23)$
Với mọi $M > 0$ và $T > 0,$ ta đặt
$$\begin{aligned} W(M,T) = \{v \in L^\infty(0,T;V \cap H^2) : v_t \in L^\infty(0,T;V), v_{tt} \in L^2(Q_T), \\ \|v\|_{L^\infty(0,T;V\cap H^2)}, \|v_t\|_{L^\infty(0,T;V)}, \|v_{tt}\|_{L^2(Q_T)} \le M\}, \end{aligned} \quad (24)$$
$$W_1(M,T) = \{v \in W(M,T) : v_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2)\}, \quad (25)$$
trong đó $Q_T = (0,1)\times(0,T)$. Ta xét thuật giải xấp xỉ tuyến tính sau:
Chọn số hạng ban đầu: $v_0 \in W_1(M,T)$. Giả sử rằng:

$v_{m-1} \in W_1(M,T).$ (26)

Ta liên kết bài toán (13)-(15) với toán biến phân tuyến tính sau:
Tìm $v_m \in W_1(M,T)$ thỏa bài toán biến phân tuyến tính sau:

$$\langle \ddot{v}_m(t), w\rangle + a(v_m(t), w) = \langle F_m(t), w\rangle \quad \forall w \in V, \tag{27}$$
$$v_m(0) = \widetilde{v}_0,\ \dot{v}_m(0) = \widetilde{v}_1, \tag{28}$$

trong đó

$$F_m(x,t) = \widetilde{f}(x,t,v_{m-1}(t), \nabla v_{m-1}(t), \dot{v}_{m-1}(t)). \tag{29}$$

Khi đó ta có các kết quả sau đây.

Định lý 1. *Giả sử $(H_1)-(H_4)$ là đúng. Khi đó, với mọi $v_0 \in W_1(M,T)$, tồn tại các hằng số dương M,T và một dãy qui nạp tuyến tính $\{v_m\} \subset W_1(M,T)$ xác định bởi* (27)-(29).

Định lý 2. *Giả thiết $(H_1)-(H_4)$ là đúng. Khi đó, với mọi $v_0 \in W_1(M,T)$, tồn tại các hằng số dương M,T sao cho bài toán* (13)-(15) *có duy nhất một nghiệm yếu $v \in W_1(M,T)$. Mặt khác, dãy qui nạp tuyến tính $\{v_m\}$ được xác định bởi* (27)-(29) *hội tụ mạnh về nghiệm v trong không gian*

$$W_1(T) = \{v \in L^\infty(0,T;V) : \dot{v} \in L^\infty(0,T;L^2)\}.$$

Hơn nữa, ta cũng có đánh giá sai số

$$\|v_m - v\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|\dot{v}_m - \dot{v}\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le Ck_T^m, \text{ với mọi } m, \tag{30}$$

trong đó

$$k_T = 8TK_1 < 1, \tag{31}$$

và C là một hằng số chỉ phụ thuộc vào T, v_0, v_1 và k_T.

Chứng minh. Chứng minh hai Định lý trên đây khá dài và tương tự như trong [9].

3. KHAI TRIỂN TIỆM CẬN CỦA NGHIỆM

Trong phần này, ta xét bài toán nhiễu sau đây, trong đó ε là một tham số bé, $|\varepsilon| \le 1$:

$$(P_\varepsilon)\ \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = F_\varepsilon(x,t,u,u_x,u_t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u_x(0,t) - h_0 u(0,t) = g_0(t),\ \ u(1,t) = g_1(t), \\ u(x,0) = \tilde{u}(x),\ \ u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \\ F_\varepsilon(x,t,u,u_x,u_t) = f(x,t,u,u_x,u_t) + \varepsilon f_1(x,t,u,u_x,u_t). \end{cases}$$

Ta thành lập các giả thiết bổ sung như sau:

(H_5) $\quad f \in C^{N+1}([0,1]\times IR_+ \times IR^3),\ f_1 \in C^N([0,1]\times IR_+ \times IR^3),$

thỏa các điều kiện sau

(i) $\quad D_3^{\alpha_3} D_4^{\alpha_4} D_5^{\alpha_5} f(1,t,u,v,w) = 0,\ (\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5) \in Z_+^3,\ \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \le N,$

(ii) $\ D_3^{\alpha_3} D_4^{\alpha_4} D_5^{\alpha_5} f_1(1,t,u,v,w) = 0,\ (\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5) \in Z_+^3,\ \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \le N-1,$

với mọi $t \ge 0$ và $(u,v,w) \in IR^3$.

Giả sử $u_0 \in W(M,T)$ là một nghiệm yếu của bài toán (P_0) tương ứng với $\varepsilon = 0$.

Khi đó, ta có định lý sau.

Định lý 3. *Giả sử $(H_1),(H_2),(H_3)$ và (H_5) là đúng. Khi đó, tồn tại các hằng số $M > 0,\ T > 0$ và các hàm $u_1, u_2,..., u_N \in W_1(M,T)$, sao cho, với mọi ε, với $|\varepsilon| \le 1$, bài toán (P_ε) có duy nhất một nghiệm yếu $u_\varepsilon \in W_1(M,T)$ thỏa một đánh giá tiệm cận đến cấp $N+1$ như sau*

$$\left\| \dot{u}_\varepsilon - \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \dot{u}_i \right\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \left\| u_\varepsilon - \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i u_i \right\|_{L^\infty(0,T;V)} \le C_T |\varepsilon|^{N+1}, \qquad (32)$$

trong đó C_T là một hằng số phụ thuộc vào $T, M, u_1, u_2,..., u_N$.

Chứng minh. Định lý trên chứng minh khá dài và phức tạp[9].

Chú thích 3.1. Trong [7] các tác giả đã xét khai triển tiệm cận đến cấp 2 cho bài toán (1), (3) với điều kiện biên hỗn hợp thuần nhất (12), tương ứng với đánh giá như sau

$$\|\dot{u}_\varepsilon - \dot{u}_0 - \varepsilon \dot{u}_1\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|u_\varepsilon - u_0 - \varepsilon u_1\|_{L^\infty(0,T;V)} \le C_T \varepsilon^2. \qquad (33)$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Caughey T., Ellison J., *Existence uniqueness and stability of solutions of a class of nonlinear differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 51 (1975), pp.1-32.

[2] Alain Phạm Ngọc Định, *Sur un problème hyperbolique faiblement nonlinéaire en dimension* 1, Demonstratio Math. 16 (1983), pp.269-289.

[3] Alain Phạm Ngọc Định, Nguyễn Thành Long, *Linear approximation an asymtotic expansion associated to the nonlinear wave equation in one dimension*, Demonstratio Math. 19 (1986), pp.45-63.
[4] Ficken F., Fleishman B., *Initial value problem and time periodic solutions for a nonlinear wave equation*, Communs Pure Appl. Math. 10 (1957), pp.331-356.
[5] Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, *On the quasilinear wave equation:* $u_{tt} - \Delta u + f(u, u_t) = 0$ *associated with a mixed nonhomogeneous condition*, Nonlinear Anal. 19 (1992), pp.613-623.
[6] Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, *A semilinear wave equation with Cauchy data*, Nonlinear Anal. 24 (1995), pp.1261-1279.
[7] Nguyễn Thành Long, Trần Ngọc Diễm, *On the nonlinear wave equation* $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u, u_x, u_t)$ *associated with the mixed homogenous conditions*, Nonlinear Anal. 29 (1997), pp.1217-1230.
[8] Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, Trần Ngọc Diễm, *Linear recursive shemes and asymptotic expansion associated with the Kirchhoff-Carrier operator*, J. Math. Anal. Appl. 267 (2002), pp.116-134.
[9] Nguyen Thanh Long, Nguyen Cong Tam, Nguyen Thi Thao Truc, *On the nonlinear wave equation with the mixed nonhomogeneous conditions*: *Linear approximation and asymptotic expansion of solution*, Demonstratio Math. 38 (2005), 365-386.
[10] Ortiz. E.L., Alain Phạm Ngọc Định, *Linear recursive schemes associated with some nonlinear patial differential equations in one dimension and Tau method*, SIAM J. Math. Anal. 18 (1987), pp.452-464.
[11] Rabinowitz P.H., *Periodic solutions of nonlinear hyperbolic differential equations*, Communs. Pure Appl. Math. 20 (1967), pp.145-205.