VỀ MỘT HỆ ELLIPTIC p- LAPLACE TRONG KHÔNG GIAN SOBOLEV CÓ TRỌNG
ON THE p- LAPLACE ELLIPTIC SYSTEM IN WEIGHTED SOBOLEV SPACES

Trần Minh Thuyết*, Lê Khánh Luận*, Võ Giang Giai**

* Trường Đại học Kinh tế Tp. Hồ Chí Minh, Việt nam
** Trường THPT Nguyễn Thượng Hiền Tp. Hồ Chí Minh, Việt nam

BẢN TÓM TẮT

Chúng tôi nghiên cứu bài toán biên phi tuyến sau

$$(*)\quad \begin{cases} \dfrac{-1}{r^{\gamma}}\dfrac{d}{dr}\left(r^{r}\left|u_i^{/}(r)\right|^{p-2}u_i^{/}(r)\right)+\left|u_i(r)\right|^{p-2}u_i(r)=f_i\ \left(r,u_1(r),u_2(r)\right),\ 0<r<1, \\ \left|u_i^{/}(1)\right|^{p-2}u_i^{/}(1)+h_iu_i(1)=g_i, \\ \left|\lim\limits_{r\to 0_+}r^{r/p}u_i^{/}(r)\right|<+\infty,\ (i=1,\,2), \end{cases}$$

trong đó $\gamma = N-1$, $p \geq 2$, $h_1 > 0, h_2 > 0$, g_1, g_2 là các hằng số cho trước và f_1, f_2 là các hàm cho trước. Trong bài nầy, chúng tôi dùng phương pháp Galerkin và compact trong các không gian Sobolev có trọng thích hợp để chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm (u_1, u_2) của bài toán (*). Sau đó, Chúng tôi cũng nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm $\left(u_1(h_1,h_2),\, u_2(h_1,h_2)\right)$ phụ thuộc vào (h_1,h_2) khi $h_1 \to 0_+$, $h_2 \to 0_+$.

ABSTRACT

We study the following nonlinear boundary value problem.

$$(*)\quad \begin{cases} \dfrac{-1}{r^{\gamma}}\dfrac{d}{dr}\left(r^{r}\left|u_i^{/}(r)\right|^{p-2}u_i^{/}(r)\right)+\left|u_i(r)\right|^{p-2}u_i(r)=f_i\ \left(r,u_1(r),u_2(r)\right),\ 0<r<1, \\ \left|u_i^{/}(1)\right|^{p-2}u_i^{/}(1)+h_iu_i(1)=g_i, \\ \left|\lim\limits_{r\to 0_+}r^{r/p}u_i^{/}(r)\right|<+\infty,\ (i=1,\,2), \end{cases}$$

where $\gamma = N-1$, $p \geq 2$, $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, g_1, g_2 are given constants, f_1, f_2 are given functions. In this paper, we use the Galerkin and compactness method in appropriate Sobolev spaces with weight to prove the existence of a unique weak solution (u_1, u_2) of the problem (*). Afterwards, we also study the asymptotic behavior of the solution $\left(u_1(h_1,h_2),\, u_2(h_1,h_2)\right)$ depending on (h_1,h_2) as $h_1 \to 0_+$, $h_2 \to 0_+$.

I. GIỚI THIỆU

Trong bài này, chúng tôi xét bài toán biên phi tuyến cho hệ phương trình elliptic p - Laplace sau:

$$\frac{-1}{r^{\gamma}}\frac{d}{dr}\left(r^{r}\left|u_i^{/}(r)\right|^{p-2}u_i^{/}(r)\right)+\left|u_i(r)\right|^{p-2}u_i(r)=f_i\ \left(r,u_1(r),u_2(r)\right),\ 0<r<1, \qquad (1)$$

$$\left|u_i^{/}(1)\right|^{p-2}u_i^{/}(1)+h_iu_i(1)=g_i, \qquad (2)$$

$$\left|\lim_{r\to 0_+} r^{r/p}u_i^{/}(r)\right|<+\infty,\ (i=1,\ 2), \qquad (3)$$

trong đó $\gamma=N-1,\ p\geq 2,\ h_1>0,\ h_2>0,\ g_1,\ g_2$ là các hằng số cho trước và $f_1,\ f_2$ là các hàm cho trước thỏa các điều kiện nào đó mà ta sẽ chỉ rõ sau. Trường hợp cho một phương trình tương tự như trên đã có nhiều nhà Toán học quan tâm nghiên cứu, chẳng hạn như: Nghĩa, Long [8]; Long, Dũng, Thuyết [2]; Long, Dũng, Nghĩa, Thuyết [3], Long, Ortiz, Định [5, 6], Long, Lăng [7]. Chú ý rằng nếu đặt $v_i(x)=u_i\left(\left|x\right|\right)=u_i(r),$ là hàm chỉ phụ thuộc vào $r=\left|x\right|=\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right)^{1/2}$, thì nghiệm của bài toán (1)-(2) chính là nghiệm radial của bài toán biên phi tuyến cho hệ phương trình elliptic p-Laplace như sau:

$$-\Delta_p v_i+\left|v_i\right|^{p-2}v_i=f_i(\left|x\right|,v_1,v_2),\ \text{trong}\ \Omega_1, \qquad (4)$$

$$\left|\nabla v_i\right|^{p-2}\frac{\partial v_i}{\partial \nu}+h_iv_i=g_i,\ \text{trên}\ \partial\Omega_1, (\text{i}=1,\ 2), \qquad (5)$$

trong đó

$$\Omega_1=\{x\in IR^N:\left|x\right|<1\},\ \Delta_p v=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\nabla v\right|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right),\ \left|\nabla v\right|^2=\left(\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\right)^{1/2},$$

ν làpháp tuyến đơn vị hướng ra ngoài biên $\partial\Omega_1,\ \gamma=N-1,\ p\geq 2,\ h_1>0,\ h_2>0,\ g_1,\ g_2$ là các hằng số cho trước và $f_1,\ f_2$ là các hàm cho trước thỏa các điều kiện nào đó mà ta sẽ chỉ ra sau. Trong [1], Huang, Li, xét hệ phương trình elliptic p-Laplace sau

$$-\Delta_p u+\left|u\right|^{p-2}u=F_u(\left|x\right|,u,v),\ \text{trong}\ IR^N, \qquad (6)$$

$$-\Delta_p v+\left|v\right|^{p-2}v=-F_v(\left|x\right|,u,v),\ \text{trong}\ IR^N, \qquad (7)$$

$$u,v\in W^{1,p}(IR^N), \qquad (8)$$

trong đó $F_u(\left|x\right|,u,v)=\frac{\partial F}{\partial u}\left(\left|x\right|,u,v\right),\ F_v(\left|x\right|,u,v)=\frac{\partial F}{\partial v}\left(\left|x\right|,u,v\right),$ với $F\in C^1\left([0,+\infty)\times IR^2;IR\right)$ $1<p<N,$ cho trước. Với một số điều kiện đặt ra cho $N,\ p,\ F,$ các tác giả Huang, Li, chứng minh bài toán (6)-(8) có vô số nghiệm radial $(u,v),$ nghĩa là nghiệm $\left(u(x),v(x)\right)$ chỉ phụ thuộc vào $r=\left|x\right|.$

Trong bài này, trước tiên chúng tôi thiết lập một số không gian Sobolev có trọng cụ thể cùng với các tính chất của chúng. Ở mục 3 chúng tôi chứng minh định lý tồn tại và duy nhất nghiệm yếu của bài toán (1)-(3) trong các không gian hàm Sobolev có trọng thích hợp. Trong chứng minh có sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin kết hợp với phương pháp compact và đơn điệu. Ở mục 4, chúng tôi cũng nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm $\left(u_1(h_1,h_2),\, u_2(h_1,h_2)\right)$ phụ thuộc vào (h_1,h_2) khi $h_1 \to 0_+$, $h_2 \to 0_+$. Các kết quả thu được ở đây đã tổng quát hoá tương đối các kết quả trong[1-3], [5-7], [8].

II. KHÔNG GIAN SOBOLEV CÓ TRỌNG

Đặt $\Omega = (0,1)$, chúng ta bỏ qua các định nghĩa về không gian hàm thông dụng như $C^m(\overline{\Omega})$, $L^p(\Omega)$, $H^m(\Omega)$, $W^{m,p}(\Omega)$. Ta ký hiệu $L^p_\gamma(\Omega) = L^p_\gamma$ là tập hợp các hàm u xác định và đo được trên Ω sao cho

$$\| u \|_{p,\gamma} < +\infty, \tag{9}$$

trong đó

$$\| u \|_{p,\gamma} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^1 r^\gamma |u(r)|^p dr \right)^{1/p}, & \text{nếu } 1 \le p < +\infty, \\ \underset{0<r<1}{ess\sup} |u(r)|, & \text{nếu } \quad p = +\infty. \end{cases}$$

Ta đồng nhất trên L^p_γ các hàm bằng nhau hầu hết trên Ω. Các phần tử của L^p_γ là các lớp tương đương các hàm đo được thỏa mãn (9), hai hàm là tương đương nếu chúng bằng nhau hầu hết trên Ω. Khi đó L^p_γ là không gian Banach với chuẩn $\| \cdot \|_{p,\gamma}$. Trong trường hợp riêng, L^2_γ là không gian Hilbert đối với tích vô hướng và chuẩn tương ứng như sau

$$\langle u,v \rangle = \int_0^1 r^\gamma u(r) v(r) dr, \qquad\qquad \| u \|_{2,\gamma} = \sqrt{\langle u,u \rangle}.$$

Ta ký hiệu $W^{1,p}_\gamma(\Omega) = W^{1,p}_\gamma = \{ v \in L^p_\gamma : v' \in L^p_\gamma \}$, với đạo hàm được hiểu theo nghĩa phân bố. Hơn nữa, ta có $W^{1,p}_\gamma$ là không gian Banach với chuẩn

$$\| u \|_{1,p,\gamma} = \begin{cases} \left(\| u \|^p_{p,\gamma} + \| u' \|^p_{p,\gamma} \right)^{1/p}, & 1 \le p < +\infty, \\ \max \left\{ \| u \|_{\infty,\gamma},\ \| u' \|_{\infty,\gamma} \right\}, & p = +\infty. \end{cases}$$

Chú ý rằng ta có thể định nghĩa $W^{1,p}_\gamma$ như là sự đầy đủ hóa của không gian $C^1(\overline{\Omega})$ đối với chuẩn $\| \cdot \|_{1,p,\gamma}$. Khi đó phép nhúng $W^{1,p}_\gamma(\Omega) \quad L^2_\gamma(\Omega)$ là liên tục nếu $p > 1$, $p \ge 2 - 1/\gamma$, và compact nếu $p \ge 2$. [4]. Đặt $H = L^2_\gamma(\Omega)$, $V = W^{1,p}_\gamma(\Omega)$ và đồng nhất H với H' (đối ngẫu của H), ta có $V \quad H \quad V'$ với các phép nhúng liên tục và nằm trù mật.

III. ĐỊNH LÝ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM

Cho $i = 1,2$, và $p \ge 2$. Đặt $p' = \dfrac{p}{p-1}$. Ta thành lập các giả thiết sau

(H_1) $f_i : \Omega \times IR^2 \to IR$ thỏa mãn điều kiện Caratheodory, nghĩa là

(i) $f_i(\cdot, y, z)$ đo được trên Ω; $\forall y, z \in IR$,

(ii) $f_i(r, \cdot, \cdot)$ liên tục trên IR^2, a.e. $r \in \Omega$,

(H_2) Tồn tại các hằng số $a, b > 0$, $0 < p_1, p_2 < p$ và hàm $q \in L^1_\gamma$ sao cho

$yf_1(r,y,z) + zf_2(r,y,z) \le a|y|^{p_1} + b|z|^{p_2}$, $\forall y, z \in IR$, a.e. $r \in \Omega$,

(H_3) Tồn tại các hằng số $a_i, b_i > 0$, và các hàm $q_i \in L^{p'}_\gamma$ sao cho

$|f_i(r,y,z)| \le a_i|y|^{p-1} + b_i|z|^{p-1} + |q_i(r)|$, $\forall y, z \in IR$, a.e. $r \in \Omega$.

Nghiệm yếu của bài toán (1.3), (1.4) được thành lập từ phương trình biến phân sau đây

Tìm $(u_1, u_2) \in V \times V$ sao cho

$$\langle A(u_i'), v' \rangle + \langle A(u_i), v \rangle + h_i u_i(1)v(1) = \langle f_i\ (r, u_1, u_2), v \rangle + g_i v(1), \ \forall v \in V, \tag{10}$$

trong đó $A(x) = |x|^{p-2}x$, $x \in IR$.

Chú thích 1. Các số hạng $u_1(1)$, $u_2(1)$ xuất hiện trong (10) được xác định với mọi $v \in V$. Ta nhận được (10) bằng cách nhân hình thức hai vế (3) với $r^\gamma v$, $v \in V$, và sau đó lấy tích phân từng phần kết hợp với việc sử dụng các điều kiện (4).

Khi đó ta có định lý sau đây.

Định lý 1. *Giả sử* $h_1 > 0, h_2 > 0, g_1, g_2 \in IR$ *và* $(H_1) - (H_3)$ *được thỏa. Khi đó bài toán biến phân* (10) *có nghiệm* $(u_1, u_2) \in V \times V$. *Hơn nữa, nếu* f_1, f_2 *thỏa*

(H_4) *Tồn tại các hằng số* $a_3, b_3 \le 2^{2-p}$, *sao cho*

$$\begin{aligned}(f_1(r,y,z) - f_1(r,y_1,z_1))(y - y_1) + (f_2(r,y,z) - f_2(r,y_1,z_1))(z - z_1) \\ \le a_3|y - y_1|^p + b_3|z - z_1|^p,\end{aligned}$$

$\forall y, y_1, z, z_1 \in IR$, a.e. $r \in \Omega$,

thì bài toán biến phân (10) *có nghiệm* (u_1, u_2) *duy nhất.*

Chứng minh. Chứng minh Định lý1 có bằng cách sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin kết hợp với lý luận về toán tử đơn điệu như trong [2, 3]. Trong chứng minh có sử dụng định lý điểm bất động Brouwer trong không gian hữu hạn chiều.

Chú thích 2. Định lý 1 vẫn còn đúng nếu giả thiết (H_2) được thay thế bởi một trong các giả thiết sau đây

(H_2') Tồn tại các hằng số $a, b < 1$ và hàm $q \in L^1_\gamma$ sao cho

$yf_1(r,y,z) + zf_2(r,y,z) \le a|y|^p + b|z|^p + |q(r)|$, $\forall y, z \in IR$, a.e. $r \in \Omega$.

(H_2'') Tồn tại các hằng số $a < 1$, $b > 0$, $0 < p_1 < p$ và hàm $q \in L^1_\gamma$ sao cho

$yf_1(r,y,z) + zf_2(r,y,z) \le a|y|^p + b|z|^{p_1} + |q(r)|$, $\forall y, z \in IR$, a.e. $r \in \Omega$.

$(H_2^{///})$ Tồn tại các hằng số $a > 0,\ b < 1,\ 0 < p_1 < p$ và hàm $q \in L_\gamma^1$ sao cho

$yf_1(r,y,z) + zf_2(r,y,z) \le a|y|^{p_1} + b|z|^p + |q(r)|,\ \forall y,z \in IR,$ a.e. $r \in \Omega.$

Chú thích 3. Tương ứng với $p = 2,\ \gamma = 1,$ các tác giả trong [5, 6] đã chứng minh phương trình vi phân Bessel phi tuyến $\frac{-1}{x}\frac{d}{dx}\left(xu^{/}(x)\right) + u^2 - u = 0,\ 0 < x < +\infty,$ liên kết với điều kiện biên $u(0) = 1,\ \lim_{x \to +\infty} u(x) = 0,$ có ít nhất một nghiệm. Một trong số các nghiệm ở trên được thiết lập từ bài toán biên $\frac{-1}{x}\frac{d}{dx}\left(xu^{/}(x)\right) + u^2 - u = 0,\ a < x < b,$ liên kết với điều kiện biên $u(a) = 1,$ $u(b) = 0,$ trong đó, $x_i < a < b < x_{i+1}$ và $x_i,\ x_{i+1}$ là hai zêro liên tiếp của hàm Bessel $J_0(x)$.

IV. DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN CỦA NGHIỆM KHI $h_1 \to 0_+,\ h_2 \to 0_+$.

Trong phần nầy ta giả sử rằng $(H_1) - (H_4)$ là đúng. Do định lý 1 bài toán biến phân (10) tương ứng với cặp số thực $(h_1, h_2),\ h_1 > 0,\ h_2 > 0,$ có nghiệm duy nhất (u_1, u_2) phụ thuộc vào (h_1, h_2) như sau $u_1 = u_1(h_1, h_2),\ \ u_2 = u_2(h_1, h_2).$ Ta sẽ nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm $\left(u_1(h_1,h_2),\ u_2(h_1,h_2)\right)$ khi $h_1 \to 0_+,\ \ h_2 \to 0_+$. Ta bổ sung thêm sau đây một giả thiết về hàm $f_1,\ f_2$.

$(H_4^{/})$ Tồn tại các hằng số $a_3,\ b_3 < 2^{2-p},$ sao cho

$$\begin{aligned}\left(f_1(r,y,z) - f_1(r,y_1,z_1)\right)(y - y_1) + \left(f_2(r,y,z) - f_2(r,y_1,z_1)\right)(z - z_1) \\ \le a_3|y - y_1|^p + b_3|z - z_1|^p,\end{aligned}$$

$\forall y, y_1, z, z_1 \in IR,$ a.e. $r \in \Omega.$

Khi đó ta có các kết quả sau đây.

Định lý 2. *Giả sử có các giả thiết* $(H_1) - (H_3)$ *và* $(H_4^{/})$ *đúng. Khi đó*:

(i) *Bài toán* (10) *tương ứng với* $h_1 = h_2 = 0$ *có nghiệm duy nhất* $\left(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}\right) \in V \times V.$

(ii) $\left\|u_1(h_1,h_2) - u_1^{(0)}\right\|_V + \left\|u_2(h_1,h_2) - u_2^{(0)}\right\|_V \le C\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right)^{1/(p-1)},\ \forall h_1 > 0,\ \forall h_2 > 0,$

trong đó C *là hằng số dương độc lập với* $h_1,\ h_2$.

Định lý 3. *Giả sử có các giả thiết* $(H_1) - (H_3)$ *đúng. Ta giả sử thêm rằng.*

$(H_4^{//})$ *Tồn tại các hằng số* $a_3,\ b_3 < 2^{2-p}$, *sao cho*

$$\begin{cases} \big(f_1(r,y,z) - f_1(r,y_1,z_1) \big)(y - y_1) \le a_3 |y - y_1|^p, \\ \big(f_2(r,y,z) - f_1(r,y_1,z_1) \big)(y - y_1) \le a_3 |z - z_1|^p, \end{cases}$$

$\forall y, y_1, z, z_1 \in IR,$ a.e. $r \in \Omega.$

Khi đó

(i) *N□u* $0 < h_1 < \widetilde{h}_1, \ 0 < h_2 < \widetilde{h}_2$ *thì*

(j) $\left| u_1(\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2)(1) \right| \le \left| u_1(h_1, h_2)(1) \right|,$

(jj) $\left| u_2(\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2)(1) \right| \le \left| u_2(h_1, h_2)(1) \right|,$

(jjj) $\left| u_1(\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2)(1) \right|^2 + \left| u_2(\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2)(1) \right|^2 \le \left| u_1(h_1, h_2)(1) \right|^2 + \left| u_2(h_1, h_2)(1) \right|^2.$

(ii) $\sup\limits_{h_1 > 0, \ h_2 > 0} \left(\left| u_1(h_1, h_2)(1) \right|^2 + \left| u_2(h_1, h_2)(1) \right|^2 \right) = \left| u_1^{(0)}(1) \right|^2 + \left| u_2^{(0)}(1) \right|^2.$

Chứng minh. Chứng minh định lý 1, 2 tương tự như trong [3] nên chúng tôi bỏ qua.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Daiwen Huang, Yongqing Li, *Multiplicity of solutions for a noncooperative p-Laplacian elliptic system in* IR^N, J. Differential Equations, **215** (2005), pp.206 – 223

[2] Nguyễn Thành Long, Bùi Tiến Dũng, Trần Minh Thuyết, *On a nonlinear boundary value problem for a nonlinear ordinary differential operator in weighted Sobolev spaces*, Z. Anal. Anw. **19** (2000), No.4, pp.1035-1046.

[3] Nguyễn Thành Long, Bùi Tiến Dũng, Nguyễn Hội Nghĩa, Trần Minh Thuyết, *On a nonlinear boundary value problem with a mixed nonhomogeneous condition: Asymptotic behavior of a solution*, Demonstratio Math. **34** (2001), No.3, pp.609-618.

[4] Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, *Periodic solutions of a nonlinear parabolic equation associated with the penetration of a magnetic field into subtance*, Computers Math. Applic. **30** (1995), No.1, pp.63-78.

[5] Nguyễn Thành Long, E.L. Ortiz, Alain Phạm Ngọc Định, *On the existence of a solution of a boundary value problem for a nonlinear Bessel equation on an unbounded interval*, Proc. Royal Irish Acad. **95 A** (1995), No.2, pp.237-247.

[6] Nguyễn Thành Long, E.L. Ortiz, Alain Phạm Ngọc Định, *A nonlinear Bessel differential equation associated with Cauchy conditions*, Computers Math. Applic. **31** (1996), No.10, pp.131-139.

[7] Nguyễn Thành Long, Trần Văn Lăng, *The problem of buckling of a nonlinearly bar immersed in a fluid*, Vietnam J. Math. **24** (1996), No.2, pp.131-142.

[8] Nguyễn Hội Nghĩa, Nguyễn Thành Long, *On a nonlinear boundary value problem with a mixed nonhomogeneous condition*, Vietnam J. Math. **26** (1998), No.4, pp.301-309.