XẤP XỈ TUYẾN TÍNH LIÊN KẾT VỚI HỆ PHƯƠNG TRÌNH HÀM PHI TUYẾN
LINEAR APPROXIMATION ASSOCIATED WITH THE SYSTEM OF NONLINEAR FUNCTIONAL

Phạm Hồng Danh*, Huỳnh Thị Hoàng Dung**

* Khoa Thống Kê -Toán- Tin học, Đại học Kinh Tế Tp. Hồ Chí Minh, Việt nam
** Bộ môn Toán- Tin học, Đại học Kiến trúc Tp. Hồ Chí Minh, Việt nam

---

BẢN TÓM TẮT

Xét hệ phương trình hàm phi tuyến

(1) $$f_i(x) = \varepsilon \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}\Phi\left(x, \int_0^{X_{ijk}(x)} f_j(t)dt\right) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ijk} f_j(S_{ijk}(x)) + g_i(x),$$

$\forall x \in \Omega = [a,b],\ i = 1,...,n,$ trong đó ε là một tham số bé, a_{ijk}, b_{ijk} là các hằng số thực cho trước, $g_i : \Omega \to IR,\ X_{ijk},\ S_{ijk} : \Omega \to \Omega,$ và $\Phi : \Omega \times IR \to IR$ là các hàm số liên tục cho trước, $f_i : \Omega \to IR$ là các ẩn hàm. Bằng cách dùng định lý điểm bất động Banach, chúng tôi chứng minh hệ (1) có nghiệm duy nhất. Nếu $\Phi \in C^2(\Omega \times IR^2; IR)$ và $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{1\le j\le n}\left|b_{ijk}\right| < 1$ chúng tôi thu được một thuật giải lặp cấp hai cho hệ (1). Hơn nữa, chúng tôi cũng thu được một số kết quả liên quan sự tồn tại C^1- nghiệm của hệ (1).

ABSTRACT

We consider the following system of nonlinear functional equations

(1) $$f_i(x) = \varepsilon \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}\Phi\left(x, \int_0^{X_{ijk}(x)} f_j(t)dt\right) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ijk} f_j(S_{ijk}(x)) + g_i(x),$$

$\forall x \in \Omega = [a,b],\ i = 1,...,n,$ where ε is a small parameter, a_{ijk}, b_{ijk} are the given real constants; $g_i : \Omega \to IR, X_{ijk},\ S_{ijk} : \Omega \to \Omega,$ và $\Phi : \Omega \times IR \to IR$ are the given continuous functions and $f_i : \Omega \to IR$ are unknown functions. By using the Banach fixed point theorem, we prove the system (1) has a unique solution. If $\Phi \in C^2(\Omega \times IR^2; IR)$ and $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{1\le j\le n}\left|b_{ijk}\right| < 1$ we obtain the quadratic convergence of the system (1). Moreover, we also obtain some results concerning the existence of C^1-solutions of a system (1).

1. Mở đầu

Trong bài nầy, chúng tôi nghiên cứu hệ phương trình hàm sau

(1) $$f_i(x) = \varepsilon \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ijk} \Phi\left(x, \int_0^{X_{ijk}(x)} f_j(t)dt \right) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ijk} f_j(S_{ijk}(x)) + g_i(x),$$

$\forall x \in \Omega = [a,b],\ i = 1,...,n,\ a_{ijk}, b_{ijk}$ là các hằng số thực cho trước; $g_i : \Omega \to R$, $X_{ijk}, S_{ijk} : \Omega \to \Omega$, và $\Phi : \Omega \times IR \to IR$ là các hàm số liên tục cho trước thoả một số điều kiện nào đó mà ta sẽ đặt sau. Các hàm $f_i : \Omega \to IR$ là các ẩn hàm, ε là một tham số bé.

Trong [2-4] các tác giả đã xét sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình hàm

(2) $$f(x) = a(x, f(S(x))),$$

trong không gian hàm $BC[a,b]$. Trong [5], các tác giả Long, Nghĩa, Ruy, Khôi đã nghiên cứu một trường hợp riêng của (1) với $\Phi \equiv 0$. Trong [13], các tác giả Wu, Xuan, Zhu đã nghiên cứu hệ (1) sau đây ứng với $\Omega = [-b,b],\ m = n = 2,\ \Phi \equiv 0$ và S_{ijk} là các nhị thức bậc nhất.

(3) $$\begin{cases} f_1(x) = a_{11} f_1(b_{11}x + c_{11}) + a_{12} f_2(b_{12}x + c_{12}) + a_{13} f_1(b_{13}x + c_{13}) + g_1(x), \\ f_2(x) = a_{21} f_1(b_{21}x + c_{21}) + a_{22} f_2(b_{22}x + c_{22}) + a_{23} f_2(b_{23}x + c_{23}) + g_2(x), \end{cases}$$

với mọi $x \in \Omega = [-b,b]$, trong đó, các hằng số $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, b$ cho trước thỏa các điều kiện

(4) $$|b_{ij}| < 1,\ b \geq \max_{i,j} \left[\frac{|c_{ij}|}{1 - |b_{ij}|} \right],\ \max_i \left(\sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| \right) < 1,$$

các hàm số g_1, g_2 liên tục cho trước và f_1, f_2 là các ẩn hàm. Nghiệm của hệ (2) lúc này cũng được xấp xỉ bởi một dãy qui nạp hội tụ đều và ổn định đối với các g_i.

Trong [7], Long, Danh, Khôi đã nghiên cứu hệ phương trình tích phân tuyến tính

(5) $$f_i(x) = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} f_j(S_{ij}(x)) + \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} \int_0^{X_{ij}(x)} f_j(t)dt + g_i(x),$$

$i = 1,2,\ x \in \Omega \subset R$, trong đó Ω là một khoảng đóng bị chặn hoặc khoảng không bị chặn của R. Các hàm $g_i : \Omega \to IR,\ S_{ij}, X_{ij} : \Omega \to \Omega$ là các hàm số liên tục cho trước, $a_{ij}, \alpha_{ij} \in R$ là các hằng số, và f_1, f_2 là các ẩn hàm.

Trong [1], Danh, Dung, Long đã khảo sát hệ (1) tương ứng với $\Phi(x,z) = z,\ S_{ijk}(x), X_{ijk}(x)$ là các nhị thức bậc nhất, mà cụ thể có dạng như sau

(6) $$f_i(x) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ijk} f_j(b_{ijk}x + c_{ijk}) + \alpha_{ijk} \int_0^{\beta_{ijk}x + \gamma_{ijk}} f_j(t)dt \right) + g_i(x),$$

$i = 1,2,...,n,\ x \in \Omega = [-b,b].$ Các tác giả trong [1, 9] đã xấp xỉ nghiệm $f = (f_1,...,f_n)$ của hệ (5) bằng một dãy các đa thức hội tụ đều, trong đó $g_i : \Omega \to IR$ là các hàm liên tục cho trước, $a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}, \alpha_{ijk}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijk} \in IR$ là các hằng số thực cho trước thỏa các điều kiện

(7) $$|b_{ijk}| < 1,\ |\beta_{ijk}| < 1,$$

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \max_{1\le j\le n} \left(|a_{ijk}| + b|\alpha_{ijk}|\right) < 1,$$

(8) $$\max_{1\le i,j\le n,\ 1\le k\le m} \frac{|c_{ijk}|}{1-|b_{ijk}|} \le b, \quad \max_{1\le i,j\le n,\ 1\le k\le m} \frac{|\gamma_{ijk}|}{1-|\beta_{ijk}|} \le b.$$

Với $\Phi \equiv 0,$ trong [11] cũng tiến hành giải số hệ (1). Cũng trong trường hợp $\Phi \equiv 0$ và S_{ijk} là các nhị thức bậc nhất, $g \in C^r(\Omega; IR^n)$ và $\Omega = [-b,b]$ các tác giả trong [5] đã thu được một khai triển Maclaurin của nghiệm của hệ (1) cho đến cấp $r.$ Hơn nữa, nếu g_i là các đa thức bậc $r,$ thì nghiệm của hệ (1) cũng là đa thức bậc $r.$ Kế đó, nếu g_i là các hàm liên tục, nghiệm f của (1) được xấp xỉ bởi một dãy các đa thức hội tụ đều. Sau đó, các kết quả trên đây đã được nới rộng bởi Long, Nghĩa[6] và Nghĩa [12] cho miền $\Omega \subset IR^p$ nhiều chiều và S_{ijk} là các hàm affine. Hơn nữa, trong [10] cũng cho một điều kiện đủ về hội tụ cấp hai của hệ phương trình hàm.

Trong [10], Long đã nghiên cứu hệ phương trình hàm phi tuyến

(9) $$f_i(x) = \varepsilon \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}\Psi\big(f_j(R_{ijk}(x))\big) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ijk} f_j(S_{ijk}(x)) + g_i(x),$$

$i = 1,2,...,n,\ x \in \Omega,$ trong đó Ω là một khoảng đóng bị chặn hoặc khoảng không bị chặn của $IR.$ Các hàm $g_i : \Omega \to IR,\ S_{ijk}, R_{ijk} : \Omega \to \Omega$ và $\Psi : IR \to IR$ là các hàm số liên tục cho trước; a_{ijk}, b_{ijk} là các hằng số, và $f = (f_1,...,f_n)$ là các ẩn hàm. Một số kết quả liên quan đến khai triển tiệm cận của nghiệm cho hệ (9) theo một tham số bé ε cũng được xem xét với $\Psi(y) = y^2$ [8] và tổng quát với $\Psi \in C^1(IR)$ [10]. Một số kết quả liên quan đến khai triển tiệm cận của nghiệm cho hệ (9) theo một tham số bé ε cũng được xem xét trong bài báo của Long, Diễm [8] và Long [10].

Trong bài nầy, bằng định lý điểm bất động Banach, chúng tôi chứng minh hệ (1) tồn tại và duy nhất nghiệm mà nghiệm nầy cũng ổn định đối với các hàm $g_i,$ trong đó, $\Omega = [a,b]$ hoặc Ω là một khoảng không bị chặn của $IR.$ Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu một điều kiện đủ để thu được thuật giải hội tụ cấp hai cho hệ (1). Sau đó, nếu $S_{ijk}, X_{ijk} \in C^1(\Omega; IR)$ và $g \in C^1(\Omega; IR^n)$ chúng tôi chứng minh rằng nghiệm của hệ (1) cũng thuộc $C^1(\Omega; R^n).$ Trường hợp $\Phi(x,z) = z,$ và $S_{ijk}(x), X_{ijk}(x)$ là các nhị thức bậc nhất và nếu g_i là các hàm liên tục, nghiệm f của (1) được xấp xỉ bởi một dãy các đa thức hội tụ đều. Các kết quả thu được trên đây là một sự tổng quát hoá tương đối của các kết quả trong [1-13].

2. Định lý tồn tại, duy nhất và ổn định nghiệm

Ta ký hiệu $\Omega = [a,b]$ và $X = C(\Omega; R^n)$ là không gian Banach của các hàm số $f = (f_1,...,f_n) : \Omega \to R^n$ liên tục trên Ω đối với chuẩn

(10) $\|f\|_X = \sup_{x\in\Omega}\sum_{i=1}^{n}|f_i(x)|$.

Tương tự, với số nguyên không âm m, ta đặt

$$C^m(\Omega;R^n) = \{f = (f_1,...,f_n) \in C(\Omega;R^n) : f_i^{(k)} \in C(\Omega;R),\ 0 \le k \le m,\ 1 \le i \le n\}.$$

Mặt khác, $C^m(\Omega;R^n)$ cũng là không gian Banach đối với chuẩn

(11) $\|f\|_m = \max_{1\le k\le m}\sup_{x\in\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left|f_i^{(k)}(x)\right|.$

Ta viết hệ (1) theo dạng của một phương trình toán tử trong $X \equiv C(\Omega;R^n)$

(12) $f = \varepsilon Af + Bf + g$

trong đó $f = (f_1,...,f_n)$, $Af = ((Af)_1,...,(Af)_n)$, $Bf = ((Bf)_1,...,(Bf)_n)$,

(13) $(Af)_i(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}\Phi\left(x, \int_0^{X_{ijk}(x)} f_j(t)dt\right)$,

(14) $(Bf)_i(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ijk} f_j(S_{ijk}(x))$, $(1 \le i \le n)$ với mọi $x \in \Omega$.

Ta thành lập các giả thiết sau:

(H_1) $S_{ijk}, X_{ijk} : \Omega \to \Omega$ liên tục,

(H_2) $g = (g_1,...,g_n) \in X$,

(H_3) $\|[b_{ijk}]\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n}|b_{ijk}| < 1$,

(H_4) $\Phi : \Omega \times IR \to IR$ thỏa điều kiện

$\forall M > 0, \exists C_1(M) > 0 : |\Phi(x,z_1) - \Phi(x,z_2)| \le C_1(M)|z_1 - z_2|$,

$$\forall z_1, z_2 \in IR,\ |z_i| \le Mb,\ i = 1,2.$$

(H_5) $M > \dfrac{2\|g\|_X}{1 - \|[b_{ijk}]\|}$ và $0 < \varepsilon_0 < \dfrac{M(1 - \|[b_{ijk}]\|)}{2\left(bMC_1(M) + n\sup_{x\in\Omega}|\Phi(x,0)|\right)\|[a_{ijk}]\|}$.

Đầu tiên, nếu $\|[b_{ijk}]\| < 1$, ta có $I - B : X \to X$ là toán tử tuyến tính, khả đảo và $\|(I-B)^{-1}\| \le \dfrac{1}{1 - \|[b_{ijk}]\|}$. (xem[1]), ta viết lại hệ (12) dưới dạng

(15) $f = (I-B)^{-1}(\varepsilon Af + g) \equiv Tf$.

Với mỗi $M > 0$, ta đặt $K_M = \{f \in X : \|f\|_X \le M\}$. Khi đó, ta có.

Định lý 1. *Giả sử* (H_1) - (H_5) *đúng. Khi đó, với mỗi* ε, *với* $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$, *hệ* (15) *có một nghiệm duy nhất* $f \in K_M$. *Hơn nữa nghiệm của hệ* (15) *cũng ổn định đối với* g *trong* K_M.

Chứng minh. Chứng minh có thể tìm thấy trong[1]■

Chú thích 1. Nhờ định lý điểm bất động Banach, nghiệm của hệ (15) được xấp xỉ bởi thuật giải

(16) $f^{(\nu)} = Tf^{(\nu-1)} \equiv (I-B)^{-1}(\varepsilon Af^{(\nu-1)} + g)$, với $f^{(0)} \in K_M$ cho trước.

Khi đó $f^{(\nu)} \to f$ trong X khi $\nu \to +\infty$, và

(17) $\left\| f^{(\nu)} - f \right\|_X \le \left\| f^{(0)} - Tf^{(0)} \right\|_X \dfrac{\sigma^\nu}{1-\sigma}$, $\forall \nu = 1,2,...$, với $\dfrac{\varepsilon_0 bC_1(M)\left\|[a_{ijk}]\right\|}{1-\left\|[b_{ijk}]\right\|} < 1.$

Chú thích 2. Trường hợp $\Phi(x,z) = z$, và $S_{ijk}(x), X_{ijk}(x)$ là các nhị thức bậc nhất

(18) $S_{ijk}(x) = \alpha_{ijk}x + \delta_{ijk}$, $X_{ijk}(x) = \beta_{ijk}x + \gamma_{ijk}$

và $\Omega = [-b,b]$. Giả sử rằng các số thực $\alpha_{ijk}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijk}, \delta_{ijk}$ thỏa các điều kiện sau

$$(H_1^/)\quad \begin{aligned} &\left|\alpha_{ijk}\right| < 1,\ \left|\beta_{ijk}\right| < 1,\ i,j = 1,2,...,n, k = 1,2,...,m,\\ &\max_{1\le i,j\le n, 1\le k\le m} \frac{\left|\delta_{ijk}\right|}{1-\left|\alpha_{ijk}\right|} \le b, \quad \max_{1\le i,j\le n, 1\le k\le m} \frac{\left|\gamma_{ijk}\right|}{1-\left|\beta_{ijk}\right|} \le b. \end{aligned}$$

Khi đó ta có

Định lý 2. *Giả sử rằng $\Omega = [-b,b]$ và các số thực $b_{ijk}, c_{ijk}, \alpha_{ijk}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijk}, \delta_{ijk}$ thỏa $(H_1^/)$, (H_3) và $S_{ijk}(x), X_{ijk}(x)$ có dạng* (18). *Khi đó, với mỗi $g \in X$, tồn tại duy nhất một hàm $f = (f_1,...,f_n) \in X$ là nghiệm của hệ*

(19) $f_i(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ikj} \int_0^{\beta_{ijk}x+\gamma_{ijk}} f_j(t)dt + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ijk} f_j(\alpha_{ijk}x + \delta_{ijk}) + g_i(x),$

$i = 1,2,...,n,\ x \in \Omega = [-b,b]$. *Hơn nữa, nghiệm nầy cũng ổn định đối với g trong X.*

Chú thích 3. Kết quả [13] là một trường hợp riêng của định lý 2 với $\Omega = [-b,b]$, $m = n = 2$, $a_{ijk} = 0$. Liên quan đến hệ (19) ta có kết quả sau.

Mệnh đề 3.[1] *Dưới các giả thiết của định lý 2, nếu $a_{ijk} = 0$ và $g_1,...,g_n$ là các đa thức có bậc $\le r-1$, thì nghiệm f của hệ* (19) *tương ứng với $a_{ijk} = 0$ cũng là đa thức có bậc $\le r-1$.*

Để xấp xỉ nghiệm của hệ (19) bằng một dãy các đa thức, ta giả sử rằng các số thực $b_{ijk}, c_{ijk}, \alpha_{ijk}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijk}, \delta_{ijk}$ thỏa các điều kiện như trong định lý 2. Giả sử $f \in C(\Omega; IR^n)$ là nghiệm duy nhất của hệ (19) tương ứng với $g \in C(\Omega; IR^n)$.

Trước hết, do định lý Weierstrass mỗi hàm liên tục g_i được xấp xỉ bằng một dãy các đa thức hội tụ đều $P_i^{[q]}$ khi bậc $q \to +\infty$. Từ đó, $P^{[q]} = (P_1^{[q]},...,P_n^{[q]})$ hội tụ trong $C(\Omega; IR^n)$ về g khi $q \to +\infty$. Ta đặt

(20) $(Af)_i(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ikj} \int_0^{\beta_{ijk}x+\gamma_{ijk}} f_j(t)dt,\ (Bf)_i(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ijk} f_j(\alpha_{ijk}x + \delta_{ijk}),$

$i = 1,2,...,n,\ x \in \Omega = [-b,b]$. Ta xét dãy $\{f^{[q]}\}$ được xác định bởi

(21) $f^{[0]} \equiv 0,\ f^{[q]} = Bf^{[q]} + Af^{[q-1]} + P^{[q]},\ q = 1,2,...$

Ta chú ý rằng $Af^{[q-1]} + P^{[q]}$ là đa thức có bậc $\le q$, do mệnh đề 3, nghiệm $f^{[q]}$ cũng là đa thức có bậc $\le q$. Do đó ta có.

Định lý 4.[1] *Ta có* $\lim_{q\to+\infty} \left\| f^{[q]} - f \right\|_X = 0.$

Hơn nữa, nếu chuỗi $\sum_{j=1}^{\infty} \theta^{-j} \left\| P^{[j]} - g \right\|_X$ *hội tụ, ta có đánh giá sai số*

$$\left\| f^{[q]} - f \right\|_X \le \left(\left\| f \right\|_X + \frac{1}{1 - \left\| [b_{ijk}] \right\|} \sum_{j=1}^{\infty} \theta^{-j} \left\| P^{[j]} - g \right\|_X \right) \theta^q, \ \forall q \in IN, \tag{22}$$

trong đó $\theta = \dfrac{b \left\| [a_{ijk}] \right\|}{1 - \left\| [b_{ijk}] \right\|} < 1.$

3. Thuật giải lặp cấp hai

Thuật giải xấp xỉ liên tiếp (16) được cho bởi cách làm của định lý ánh xạ co, đó cũng là một thuật giải hội tụ cấp 1. Để làm gia tăng tốc độ hội tụ, trong phần này chúng tôi nghiên cứu một thuật giải cấp hai cho hệ phương trình hàm (1).

Giả sử rằng $\Phi \in C^1(\Omega \times IR; IR)$ và sử dụng xấp xỉ sau

$$\Phi(x, z_j^{(\nu)}) \cong \Phi(x, z_j^{(\nu-1)}) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, z_j^{(\nu-1)})(z_j^{(\nu)} - z_j^{(\nu-1)}), \tag{23}$$

trong đó $z_j^{(\nu)} = \int_0^{X_{ijk}(x)} f_j^{(\nu)}(t)dt.$ Ta thu được giải thuật sau đây cho hệ (1)

i) Cho trước $f^{(0)} = (f_1^{(0)}, ..., f_n^{(0)}) \in X.$

ii) Giả sử biết $f^{(\nu-1)} = (f_1^{(\nu-1)}, ..., f_n^{(\nu-1)}) \in X$, ta xác định $f^{(\nu)} = (f_1^{(\nu)}, ..., f_n^{(\nu)}) \in X$ bởi

$$f_i^{(\nu)}(x) = (Bf^{(\nu)})_i(x) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ijk}^{(\nu)}(\varepsilon, x) \int_0^{X_{ijk}(x)} f_j^{(\nu)}(t)dt + g_i^{(\nu)}(x), \tag{24}$$

$x \in \Omega, 1 \le i \le n, \nu = 1,2,...$

trong đó $\beta_{ijk}^{(\nu)}(\varepsilon, x)$, $g_i^{(\nu)}$ phụ thuộc vào $f^{(\nu-1)}$ như sau:

$$\beta_{ijk}^{(\nu)}(\varepsilon, x) = \varepsilon\, a_{ijk} \frac{\partial \Phi}{\partial z}(W_{ijk}^{(\nu)}(x)), \tag{25}$$

$$g_i^{(\nu)}(x) = g_i(x) + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ijk} \Phi(W_{ijk}^{(\nu)}((x)) - \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ijk}^{(\nu)}(\varepsilon, x) \int_0^{X_{ijk}(x)} f_j^{(\nu-1)}(t)dt, \tag{26}$$

với $W_{ijk}^{(\nu)}(x) = (x, \int_0^{X_{ijk}(x)} f_j^{(\nu-1)}(t)dt)$, $x \in \Omega, 1 \le i \le n, \nu = 1,2,...$

Khi đó ta có định lý sau mà chứng minh nó không khó khăn.

Định lý 5. *Giả sử* $(H_1)-(H_3)$ *là đúng. Nếu* $f^{(\nu-1)} \in X$ *thỏa*

$$(27)\ \gamma_\nu \equiv b \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{1\le j\le n} \sup_{x\in\Omega} \left|\beta_{ijk}^{(\nu)}(\varepsilon, x)\right| + \left\| [b_{ijk}] \right\| < 1.$$

Khi đó tồn tại duy nhất $f^{(\nu)} \in X$ *là nghiệm của* (24)–(26).■

Định lý sau đây cho một điều kiện đủ để thuật giải (24)–(26) hội tụ cấp 2. Chứng minh định lý nầy khá dài mà chi tiết của nó sẽ công bố đầy đủ ở nơi khác.

Định lý 6. *Giả sử* $\Phi \in C^2(\Omega \times IR^2; IR)$ *và* $(H_1)-(H_3)$ *đúng. Cho* $a_{ijk} \in IR$. *Khi đó, tồn tại hai hằng số* $M > 0$ *và* ε, *sao cho:*

(i) *Với* $f^{(0)} \in K_M$ *cho trước, hệ* (24)–(26) *tồn tại duy nhất nghiệm* $f^{(\nu)}$ *sao cho*

(28) $f^{(\nu)} \in K_M$, $\forall \nu = 0,1,2,...$

(ii) *Với* $f^{(0)} \in K_M$ *cho trước, dãy* $\{f^{(\nu)}\}$ *xác định bởi hệ* (24)–(26) *là dãy lặp cấp hai. Chính xác hơn, ta có*

$$(29)\quad \left\| f^{(\nu)} - f \right\|_X \le \beta_M \left\| f^{(\nu-1)} - f \right\|_X^2, \ \forall \nu = 1,2,...$$

trong đó $\beta_M = \dfrac{\dfrac{|\varepsilon|}{2} b^2 M_2 \left\| [a_{ijk}] \right\|^2}{1 - \left\| [b_{ijk}] \right\| - |\varepsilon| b M_1 \left\| [a_{ijk}] \right\|} > 0$ *và* f *là nghiệm của hệ* (1).

(iii) *Nếu* $f^{(0)}$ *được chọn đủ gần* f *sao cho* $\beta_M \left\| f^{(0)} - f \right\|_X < 1$, *thì dãy* $\{f^{(\nu)}\}$ *hội tụ về* f *đến cấp* 2 *và thỏa một đánh giá sai số*

$$(30)\quad \left\| f^{(\nu)} - f \right\|_X \le \frac{1}{\beta_M} \left(\beta_M \left\| f^{(0)} - f \right\|_X \right)^{2^\nu}, \forall \nu = 1,2,... \blacksquare$$

4. Tính khả vi của nghiệm

Trong phần nầy, dựa vào định lý điểm bất động Banach và kết quả của phần trên, chúng tôi chứng minh tính khả vi của nghiệm hệ (1) tùy thuộc vào tính khả vi của $g, \Phi, S_{ijk}, X_{ijk}$. Trước hết, ta bổ sung thêm giả thiết sau:

Giả thiết $(H^{(1)})$: $g \in C^1(\Omega; IR^n)$, $S_{ijk}, X_{ijk} \in C^1(\Omega : \Omega)$, và $\Phi \in C^1(\Omega \times IR; IR)$.

Giả sử $f \in C^1(\Omega; IR^n)$ là nghiệm duy nhất của hệ (1). Đạo hàm hai vế của hệ (1), ta được

$$(31)\ f_i^{/}(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ijk} S_{ijk}^{/}(x) f_j^{/}(S_{ijk}(x)) + G_i^{[1]}(x),$$

trong đó

$$G_i^{[1]}(x) = g_i^{/}(x)$$

(32) $$+\varepsilon \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}\left[\Phi_x^{/}\left(x, \int_0^{X_{ijk}(x)} f_j(t)dt\right) + \Phi_z^{/}\left(x, \int_0^{X_{ijk}(x)} f_j(t)dt\right) X_{ijk}^{/}(x) f_j(X_{ijk}(x))\right].$$

Vậy nếu $f \in C^1(\Omega; IR^n)$ là nghiệm của hệ (1) thì $F = (F_1, ..., F_n) = (f_1^{/}, ..., f_n^{/})$ là nghiệm của hệ:

(33) $$F_i(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ijk} S_{ijk}^{/}(x) F_j(S_{ijk}(x)) + G_i^{[1]}(x),$$

$\forall x \in [-b, b];\ i = 1, ..., n$, trong đó $G_i^{[1]}(x)$ cho bởi (32).

Với $A_{ijk} \in C(\Omega; IR)$, đặt $\left\|[A_{ijk}]\right\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{1\le j\le n} \sup_{x\in\Omega}\left| A_{ijk}(x)\right|.$

Giả sử rằng:

(34) $$\left\|[b_{ijk} S_{ijk}^{/}]\right\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{1\le j\le n} \sup_{x\in\Omega}\left| b_{ijk} S_{ijk}^{/}(x)\right| < 1.$$

Khi đó, ta có.

Bổ đề 3. *Giả sử* $(H^{(1)})$ *đúng. Cho* $f \in X = C(\Omega; IR^n)$ *và* $G_i^{[1]}(x)$ *cho bởi* (32) *thoả* (34). *Khi đó, có hệ* (33) *có duy nhất một nghiệm* $F^{[1]} = (F_1^{[1]}, ..., F_n^{[1]}) \in X.$

Chứng minh bổ đề 3. Xem[1].■

Vậy với giả thiết $(H^{(1)})$ và (34), nếu $f \in C^1(\Omega; IR^n)$ là nghiệm của hệ (1), thì $F = (f_1^{/}, ..., f_n^{/})$ là nghiệm của hệ (33). Theo bổ đề 3, hệ (33) có một nghiệm duy nhất $F^{[1]} = (F_1^{[1]}, ..., F_n^{[1]}) \in X.$ Vậy $F^{[1]} = f^{/} = (f_1^{/}, ..., f_n^{/}).$

Đảo lại, với giả thiết $(H^{(1)})$ và (34). Gọi $f \in X = C(\Omega; IR^n)$ là nghiệm duy nhất của hệ (1). Khi đó $G_i^{[1]}(x)$ cho bởi (32) hoàn toàn xác định. Ta cũng chú ý rằng hệ (33) có một nghiệm duy nhất $F^{[1]} = (F_1^{[1]}, ..., F_n^{[1]}) \in X.$ Ta sẽ chứng minh rằng $f \in C^1(\Omega; IR^n)$ và $F^{[1]} = f^{/} = (f_1^{/}, ..., f_n^{/}).$ Ta viết hệ (1) theo dạng

(35) $f = Vf$ trong $X_1 \equiv C^1(\Omega; IR^n)$

trong đó $Vf = \varepsilon Af + Bf + g.$ Dễ thấy rằng $V : X_1 \to X_1$. Khi đó, ta có.

Định lý 7. *Giả sử* $\Phi \in C^2(\Omega \times IR; IR)$, và $(H^{(1)})$ *được thỏa. Khi đó tồn tại hai hằng số* $M > 0, \varepsilon > 0$ *và* $0 \le \rho < 1$ *sao cho* $V : K_M^1 \to K_M^1$ *thoả*

$$\left\|Vf - V\tilde{f}\right\|_1 \le \rho \left\|f - \tilde{f}\right\|_1 \quad \forall f, \tilde{f} \in K_M^1,$$

từ đó, hệ (35) *có duy nhất một nghiệm* $f \in K_M^1$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Huỳnh Thị Hoàng Dung, Phạm Hồng Danh, Nguyễn Thành Long, *Xấp xỉ nghiệm của hệ phương trình tích phân-hàm phi tuyến*, Tạp chí Khoa học Đại học Sư Phạm Tp. HCM, Vol **34**, No.3 (2003), 38-48.

[2] T. Kostrzewski, *Existence and uniqueness of BC[a,b] solutions of nonlinear functional equation*, Demonstratio Math. **26** (1993), 61-74.

[3] T. Kostrzewski, *BC-solutions of nonlinear functional equation. A nonuniqueness case*, Demonstratio Math. **26** (1993), 275-285.

[4] M. Lupa, On solutions of a functional equation in a special class of functions, Demonstratio Math. **26** (1993), 137-147.

[5] Nguyễn Thành Long, Nguyễn Hội Nghĩa, Nguyễn Kim Khôi, Đinh Văn Ruy, *On a system of functional equations*, Demonstratio Math. **31** (1998), 313-324.

[6] Nguyễn Thành Long, Nguyễn Hội Nghĩa, *On a system of functional equations in a multi-dimensional domain*, Z . Anal . Anw. **19** (2000), 1017- 1034.

[7] Nguyễn Thành Long, Phạm Hồng Danh, Nguyễn Kim Khôi, *Xấp xỉ nghiệm của một hệ phương trình tích phân bởi một dãy các đa thức hội tụ đều*, Tạp chí Khoa học Đại học Sư Phạm Tp. HCM, tập **30**, No.2 (2002), 36-43.

[8] Nguyễn Thành Long, Trần Ngọc Diễm, *Khai triển tiệm cận nghiệm của hệ phương trình hàm*, Tạp chí Khoa học Đại học Sư Phạm Tp. HCM, tập **26**, No.2 (2001), 39-46.

[9] Nguyễn Thành Long, *Solution approximation of a system of integral equations by a uniformly convergent polynomials sequence*, Demonstratio Math. **37** (2004), No.1, 123 -132.

[10] Nguyễn Thành Long, *Linear approximation and asymptotic expansion associated with the system of functional equations*, Demonstratio Math. **37** (2004), No.2, 349 -362.

[11] Nguyễn Hội Nghĩa, Nguyễn Kim Khôi, *Về một hệ phương trình hàm tuyến tính*, Tạp Chí Phát Triển Khoa Học Công Nghệ, Vol. **3**, No. 7&8, (2000), 18-24.

[12] Nguyễn Hội Nghĩa, *Xấp xỉ nghiệm của hệ phương trình hàm trong miền hai chiều*, Tạp Chí Phát Triển Khoa Học Công Nghệ, Vol. **5**, No. 1&2, (2002), 56-65.

[13] C.Q. Wu, Q.W. Xuan, D.Y. Zhu, *The system of the functional equations and the fourth problem of the hyperbolic system*, SEA. Bull. Math. **15** (1991), 109 -115.