# VA CHẠM CỦA MỘT VẬT RẮN VÀ MỘT THANH ĐÀN HỒI NHỚT TUYẾN TÍNH: SỰ TỒN TẠI TOÀN CỤC VÀ ỔN ĐỊNH CỦA NGHIỆM
# THE SHOCK OF A RIGID BODY AND A LINEAR VISCOELASTIC BAR: GLOBAL EXISTENCE AND STABILITY OF SOLUTIONS


Lê Văn Út*, Nguyễn Thị Thảo Trúc**, Nguyễn Thành Long***

* Khoa học Tự nhiên, Đại học Tại Chức Cần Thơ, Việt nam
E-mail: utlev@yahoo.com
** Bộ môn Toán, Khoa Sư Phạm, Đại học Cần Thơ, Việt nam
E-mail: ntthaotruc@ctu.edu.vn
*** Khoa Toán-tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. Hồ Chí Minh, Việt nam
E-mail: longnt@hcmc.netnam.vn


---

**BẢN TÓM TẮT**


Bài báo cáo đề cập đến bài toán giá trị biên-ban đầu cho phương trình sóng tuyến tính

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} u_{tt} - \mu(t)u_{xx} + Ku + \lambda\, u_t = f(x,t),\ 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u(0,t) = 0, \\ -\mu(t)u_x(1,t) = Q(t), \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases}$$

trong đó $K, \lambda$ là các hằng số và $u_0$, $u_1$, $f$, $\mu$ là các hàm cho trước, ẩn hàm $u(x,t)$ và giá trị biên chưa biết $Q(t)$ thỏa phương trình tích phân tuyến tính

$$\text{(b)} \qquad Q(t) = K_1(t)u(1,t) + \lambda_1(t)u_t(1,t) - g(t) - \int_0^t k(t-s)u(1,s)ds,$$

trong đó $g$, $k$, $K_1, \lambda_1$ là các hàm cho trước. Bài báo gồm hai phần. Trong phần 1, chúng tôi chứng minh một định lý tồn tại toàn cục và duy nhất nghiệm yếu $(u,Q)$ của bài toán (a)-(b). Chứng minh nhờ vào phương pháp xấp xỉ Galerkin kết hợp với một số đánh giá tiên nghiệm, các lý luận về sự hội tụ yếu và tính compact. Trong phần 2, chúng tôi chứng minh rằng nghiệm $(u,Q)$ của bài toán (a)-(b) ổn định đối với dữ kiện $\left(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1\right)$.

**ABSTRACT**

This report deals with the initial-boundary value problem for the linear wave equation

$$\text{(a)}\qquad \begin{cases} u_{tt} - \mu(t)u_{xx} + Ku + \lambda\, u_t = f(x,t),\ 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u(0,t) = 0, \\ -\mu(t)u_x(1,t) = Q(t), \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases}$$

where $K, \lambda$ are given constants and $u_0, u_1, f, \mu$ are given functions, the unknown function $u(x,t)$ and the unknown boundary value $Q(t)$ satisfy the following linear integral equation

$$\text{(b)}\qquad Q(t) = K_1(t)u(1,t) + \lambda_1(t)u_t(1,t) - g(t) - \int_0^t k(t-s)u(1,s)ds,$$

where $g, k, K_1, \lambda_1$ are given functions. The paper consists of two parts. In Part 1 we prove a theorem of global existence and uniqueness of a weak solution $(u,Q)$ of problem (a)- (b). The proof is based on a Galerkin type approximation associated to various energy estimates-type bounds, weak-convergence and compactness arguments. In the second part, we prove that the solution $(u,Q)$ of problem (a)-(b) is stable with respect to the data $(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1)$.

## 1. GIỚI THIỆU

Trong bài này, chúng tôi xét bài toán: Tìm một cặp hàm $(u,Q)$ thỏa

(1) $u_{tt} - \mu(t)u_{xx} + F(u,u_t) = f(x,t),\ 0 < x < 1, 0 < t < T,$

(2) $u(0,t) = 0,$

(3) $-\mu(t)u_x(1,t) = Q(t),$

(4) $u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x),$

trong đó $F(u,u_t) = Ku + \lambda\, u_t$, với $K, \lambda$ là các hằng số và $u_0, u_1, f, \mu$ là các hàm cho trước thỏa một số điều kiện sẽ được chỉ rõ sao đó, ẩn hàm $u(x,t)$ và giá trị biên chưa biết $Q(t)$ thỏa một phương trình tích phân

(5) $Q(t) = K_1(t)u(1,t) + \lambda_1(t)u_t(1,t) - g(t) - \int_0^t k(t-s)u(1,s)ds,$

trong đó $g, k, K_1, \lambda_1$ là các hàm cho trước.

Trong [9] Long, Út và Trúc đã xét bài toán (1), (3), (4) với điều kiện biên (2) thay bởi

(6) $u(0,t) = q(t),$

trong đó $q(t)$ là hàm cho trước. Trong [9] chúng tôi đã thiết lập một khai triển tiệm cận nghiệm $(u,Q)$ bài toán (1), (3), (4), (6) theo hai tham số bé $K, \lambda$ .

Trong trường hợp $K = \lambda = 0,$ Santos [12] đã nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm bài toán (1), (2), (4) liên quan đến điều kiện biên thuộc loại memory tại $x = 1$ như sau

(7) $u(1,t) + \int_0^t g(t-s)\mu(s)u_x(1,s)ds = 0, \quad t > 0.$

Sử dụng toán tử Volterra nghịch đảo, Santos [12] đã biến đổi điều kiện biên (7) thành (3), (5) với $K_1(t) = \dfrac{g^{/}(0)}{g(0)},\ \lambda_1(t) = \dfrac{1}{g(0)}$ là các hằng số dương. Trong trường hợp $\lambda_1(t) \equiv 0,\ K_1(t) = h \geq 0,$ $\mu(t) = 1,$ bài toán (1)-(5) được xây dựng từ bài toán (1)-(4) trong đó, ẩn hàm $u(x,t)$ và giá trị biên chưa biết $Q(t)$ thỏa một bài toán Cauchy cho một phương trình vi phân thường

(8) $\begin{cases} Q^{//}(t) + \omega^2 Q(t) = hu_{tt}(1,t),\ 0 < t < T, \\ Q(0) = Q_0,\ \ Q^{/}(0) = Q_1, \end{cases}$

trong đó $h \geq 0, \omega > 0, Q_0, Q_1$ là các hằng số cho trước [5].

Trong [1], An và Triều đã nghiên cứu một trường hợp riêng của bài toán (1)-(4), (8) với $u_0 = u_1 = Q_0 = 0$ và $F(u,u_t) = Ku + \lambda\, u_t,$ với $K \geq 0, \lambda \geq 0$ là các hằng số cho trước. Trong trường hợp này bài toán (1)-(4) và (8) là một mô hình toán học mô tả sự va chạm của một vật rắn và một thanh đàn hồi nhớt tuyến tính đặt trên nền cứng [1]. Từ bài toán (8) ta biểu diễn hàm $Q(t)$ theo $Q_0, Q_1, \omega, h, u_{tt}(1,t)$ và sau đó lấy tích phân từng phần, ta thu được

(9) $Q(t) = hu(1,t) - g(t) - \int_0^t k(t-s)u(1,s)ds,$

trong đó

(10) $g(t) = -\big(Q_0 - hu_0(1)\big)\cos\omega t - \dfrac{1}{\omega}\big(Q_1 - hu_1(1)\big)\sin\omega t,$

(11) $k(t) = h\omega\, \sin\omega t.$

Trong [2] Bergounioux, Long và Định đã nghiên cứu bài toán (1), (4) với các điều kiện biên (2), (3) thay bởi

(12) $u_x(0,t) = hu(0,t) + g(t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds,$

(13) $u_x(1,t) + K_1\, u(1,t) + \lambda_1\, u_t(1,t) = 0,$

trong đó

(14) $g(t) = \big(Q_0 - hu_0(0)\big)\cos\omega t + \dfrac{1}{\omega}\big(Q_1 - hu_1(0)\big)\sin\omega t,$

(15) $k(t) = h\omega\, \sin\omega t,$

với $h \geq 0,\ \omega > 0, Q_0, Q_1, K, \lambda,\ K_1, \lambda_1$ là các hằng số cho trước.

Cũng cùng loại với bài toán trên, trong [11], Long, Định, Diễm đã nghiên cứu bài toán biên phi tuyến dưới đây

(16) $$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + K|u|^{\alpha} u + \lambda |u_t|^{\beta} u_t = f(x,t),\ 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u_x(0,t) = P(t), \\ u_x(1,t) + K_1 u(1,t) + \lambda_1 u_t(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \\ P(t) = g(t) + hu(0,t) - \int_0^t k(t-s) u(0,s) ds, \end{cases}$$

trong đó các hàm số $u_0, u_1, f$ và các hằng số không âm $K, K_1, \alpha, \beta, \lambda, \lambda_1$ là cho trước.

Bài báo gồm hai phần chính. Trong phần 1, chúng tôi chứng minh một định lý tồn tại toàn cục và duy nhất nghiệm yếu $(u,Q)$ của bài toán (1)-(5). Chứng minh nhờ vào phương pháp xấp xỉ Galerkin kết hợp với một số đánh giá tiên nghiệm và các lý luận quen thuộc về sự hội tụ yếu và tính compact. Sự khó khăn gặp phải ở đây là điều kiện biên tại $x = 1$. Để giải quyết sự khó khăn này, các giả thiết mạnh hơn về điều kiện đầu $u_0$ và $u_1$ sẽ được thành lập. Ta chú ý rằng phương pháp tuyến tính hóa trong các bài báo [3, 6] không sử dụng được trong bài toán này và trong [2, 4, 5]. Trong phần 2, chúng tôi thu được sự ổn định của nghiệm $(u,Q)$ của bài toán (1)-(5) đối với các dữ kiện $(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1)$. Các kết quả thu được ở đây đã tổng quát hóa tương đối các kết quả trong [1-3, 4-12].

## 2. ĐỊNH LÝ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT

Đặt $\Omega = (0,1)$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $T > 0$. Chúng ta bỏ qua các định nghĩa của các không gian thông dụng như $C^m(\overline{\Omega}), L^p(\Omega), W^{m,p}(\Omega)$. Ta ký hiệu $W^{m,p} = W^{m,p}(\Omega)$, $L^p = W^{0,p}(\Omega)$, $H^m = W^{m,2}(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, $m = 0,1,...$ Chuẩn $L^2$ được ký hiệu bởi $\|\cdot\|$. Ta cũng ký hiệu bởi $\langle \cdot,\cdot \rangle$ chỉ tích vô hướng trong $L^2$ hay cặp tích đối ngẫu của phiếm hàm tuyến tính liên tục với một phần tử của một không gian hàm. Ta ký hiệu bởi $\|\cdot\|_X$ là chuẩn của một không gian Banach $X$ và bởi $X'$ là không gian đối ngẫu của $X$. Ta ký hiệu bởi $L^p(0,T;X)$, $1 \le p \le \infty$ cho không gian Banach các hàm $u:(0,T) \to X$ đo được, sao cho $\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left( \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} < \infty$ với $1 \le p \le \infty$, và $\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \underset{0<t<T}{ess\sup} \|u(t)\|_X$ với $p = \infty$. Ký hiệu $u(t), u'(t) = u_t(t), u''(t) = u_{tt}(t), u_x(t), u_{xx}(t)$ để chỉ $u(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$, lần lượt. Ta đặt

(17) $V = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\}$, $a(u,v) = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx.$

$V$ là không gian Hilbert đối với tích vô hướng $a(\cdot,\cdot)$ và trên $V$, $\|v\|_{H^1}$ và $\|v\|_V = \sqrt{a(v,v)} = \|v_x\|$ là các chuẩn tương đương. Ta thành lập các giả thiết sau:

$(H_1)$

$$K, \lambda \in IR,$$

$(H_2)$

$$u_0 \in H^2 \text{ và } u_1 \in H^1,$$

$(H_3)$

$$g,\, K_1, \lambda_1 \in H^1(0,T),\ \lambda_1(t) \geq \lambda_0 > 0,\ K_1(t) \geq 0,$$

$(H_4)$

$$k \in H^1(0,T),$$

$(H_5)$

$$\mu \in H^2(0,T),\ \mu(t) \geq \mu_0 > 0,$$

$(H_6)$

$$f, f_t \in L^2(Q_T).$$

Khi đó ta có định lý sau.

**Định lý 1.** *Cho* $T > 0$. *Giả sử* $(H_1) - (H_6)$ *đúng. Khi đó, tồn tại duy nhất một nghiệm yếu* $(u, Q)$ *của bài toán* (1)-(5) *sao cho*

(18)

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0,T;V \cap H^2), u_t \in L^\infty(0,T;H^1), u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2), \\ u(1,\cdot) \in H^2(0,T),\ Q \in H^1(0,T). \end{cases}$$

**Chú thích 1.** Từ (18), thành phần $u$ trong nghiệm yếu $(u, Q)$ của bài toán (1)-(5) thỏa

(19)

$$u \in C^0(0,T;V) \cap C^1(0,T;L^2) \cap L^\infty(0,T;V \cap H^2).$$

**Chứng minh Định lý 1.** Chứng minh nhờ vào phương pháp xấp xỉ Galerkin kết hợp với một số đánh giá tiên nghiệm, các lý luận về sự hội tụ yếu và tính compact. Trong chứng minh chúng tôi có dùng định lý điểm bất động Schauder để xử lý một hệ phương trình vi- tích phân. Kỹ thuật nầy cũng sử dụng trong các công trình khác của chúng tôi [7, 8]. Tuy nhiên, chứng minh Định lý 1 cũng khá dài, chi tiết có thể xem [10].■

## 3. TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA NGHIỆM

Trong phần này, ta giả sử rằng các hàm $u_0,\, u_1$ thoả $(H_2)$. Do định lý 1, bài toán (1)-(5) có một nghiệm yếu duy nhất $(u, Q)$ phụ thuộc vào $K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1$.

(20) $$u = u(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1),\quad Q = Q(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1),$$

trong đó $(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1)$ thoả các giả thiết $(H_1), (H_3) - (H_6)$ và $u_0,\, u_1$ là các hàm cố định thoả $(H_2)$. Ta đặt

$$\Im(\lambda_0, \mu_0) = \{(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1) : (K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1) \text{ thoả các giả thiết } (H_1), (H_3) - (H_6)\},$$

trong đó $\lambda_0, \mu_0 > 0$ là các hằng số cho trước.

Khi đó, ta có định lý sau.

**Định lý 2.** *Cho* $T > 0$. *Giả sử* $(H_1)-(H_6)$ *đúng. Khi đó, nghiệm của bài toán* (1)-(5) *là ổn định đối với dữ kiện* $(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1)$, i.e.,

**Nếu** $(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1)$, $(K^j, \lambda^j, \mu^j, \lambda_1^j, f^j, g^j, k^j, K_1^j) \in \Im(\lambda_0, \mu_0)$, **sao cho**

(21) $$\begin{cases} |K^j - K| + |\lambda^j - \lambda| \to 0, \quad \|\mu^j - \mu\|_{H^2(0,T)} \to 0, \quad \|\lambda_1^j - \lambda_1\|_{H^1(0,T)} \to 0, \\ \|f^j - f\|_{L^2(0,T;L^2)} + \|f_t^j - f_t\|_{L^2(0,T;L^2)} \to 0, \quad \|g^j - g\|_{H^1(0,T)} \to 0, \\ \|k^j - k\|_{H^1(0,T)} \to 0, \quad \|K_1^j - K_1\|_{H^1(0,T)} \to 0, \end{cases}$$

*khi* $j \to +\infty$, *thì*

(22) $$\left(u^j, u_t^j, u^j(1,\cdot), Q^j\right) \to \left(u, u_t, u(1,\cdot), Q\right)$$

*mạnh trong* $L^\infty(0,T;V) \times L^\infty(0,T;L^2) \times H^1(0,T) \times L^2(0,T)$ *khi* $j \to +\infty$, *trong đó* $u_j = u(K^j, \lambda^j, \mu^j, \lambda_1^j, f^j, g^j, k^j, K_1^j), Q_j = Q(K^j, \lambda^j, \mu^j, \lambda_1^j, f^j, g^j, k^j, K_1^j)$.

**Chú thích 3.** Kỹ thuật chứng minh trong định lý nầy cũng kế thừa từ các công trình khác của chúng tôi [7, 8]. Tuy nhiên, các bài toán khảo sát ở đó hoàn toàn khác đồng thời cũng không giống nhau về thủ thuật tính toán.■

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


[1] Nguyễn Thúc An, Nguyễn Đình Triều, *Shock between absolutely solid body and elastic bar with the elastic viscous frictional resistance at the side,* J. Mech. NCSR. Vietnam Tom **XIII** (2), (1991), pp.1-7.

[2] Maitine Bergounioux, Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, *Mathematical model for a shock problem involving a linear viscoelastic bar,* Nonlinear Anal. **43** ( 2001), pp.547-561.

[3] Alain Phạm Ngọc Định, Nguyễn Thành Long, *Linear approximation and asymptotic expansion asscociated to the nonlinear wave equation in one dimension,* Demonstratio Math. **19** (1986), pp.45-63.

[5] Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, *On the quasilinear wave equation:* $u_{tt} - \Delta u + f(u, u_t) = 0$ *associated with a mixed nonhomogeneous condition,* Nonlinear Anal. **19** (1992), pp.613-623.

[6] Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, *A semilinear wave equation associated with a linear differential equation with Cauchy data*, Nonlinear Anal. **24** (1995), pp.1261-1279.

[7] Nguyễn Thành Long, Trần Ngọc Diễm, *On the nonlinear wave equation* $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u, u_x, u_t)$ *associated with the homogeneous conditions,* Nonlinear Anal. **29** (1997), pp.1217-1230.

[8] Nguyễn Thành Long, Trần Minh Thuyết, *A semilinear wave equation associated with a nonlinear integral equation*, Demonstratio Math. **36**, No.4, (2003), pp.915-938.

[9] Nguyễn Thành Long, Bùi Tiến Dũng, *A nonlinear wave equation associated with a nonlinear integral equation involving boundary value*, Electronic J. Diff. Equations, Vol. **2004**, No. 103, (2004), pp.1-21., ISSN: 1072-6691. URL: http://ejde.math.txstate.edu or http://ejde.math.unt.edu.

[10] Nguyễn Thành Long, Lê Văn Út, Nguyễn Thị Thảo Trúc, *Va chạm của một vật rắn và một thanh đàn hồi nhớt tuyến tính*, Tạp Chí Khoa học Tự nhiên, Đại học Sư phạm TP. HCM, **38**, No. 4 (2004), 27-40.
[11] Nguyễn Thành Long, Lê Văn Út, Nguyễn Thị Thảo Trúc, *On a shock problem involving a linear viscoelastic bar*, Nonlinear Anal., Series A: Theory and Methods, **63**, No.2 (2005), pp.198-224.
[12] Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, Trần Ngọc Diễm, *On a shock problem involving a nonlinear viscoelastic bar*, J. Boundary Value Problems (2005) (to appear)
[13] M.L. Santos, *Asymptotic behavior of solutions to wave equations with a memory condition at the boundary,* Electronic JDE., Vol. **2001**, No. 73 (2001), pp.1-11., ISSN: 1072-6691. URL: http://ejde.math.swt.edu or http://eide.math.unt.edu.