PHƯƠNG TRÌNH SÓNG PHI TUYẾN LIÊN KẾT VỚI MỘT PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN PHI TUYẾN
A NONLINEAR WAVE EQUATION ASSOCIATED WITH A NONLINEAR INTEGRAL EQUATION

Trần Minh Thuyết* , Phạm Gia Khánh**

* Khoa Thống Kê-Toán, Đại học Kinh tế Tp. Hồ Chí Minh, Việt nam
** Bộ môn Toán, Khoa Sư phạm, Đại học Cần, Việt nam

BẢN TÓM TẮT

Chúng tôi xét bài toán biên -giá trị đầu cho phương trình sóng phi tuyến

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} + f(u, u_t) = F(x,t),\ x \in \Omega = (0,1),\ 0 < t < T,\\
&u_x(0,t) = P(t),\ u(1,t) = 0,\\
&u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),
\end{aligned}$$

trong đó u_0, u_1, b, f, F là các hàm cho trước, ẩn hàm $u(x,t)$ và giá trị biên chưa biết $P(t)$ thỏa một phương trình tích phân phi tuyến sau đây

$$P(t) = g(t) + H(u(0,t)) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds,$$

trong đó g, H, k là các hàm cho trước. Chúng tôi chứng minh sự tồn tại và có duy nhất một nghiệm yếu cho bài toán, và bàn về tính ổn định của nghiệm (u, P) đối với các hàm $b,\ F, g,\ H$ và $k.$ Trong chứng minh, phương pháp Galerkin được sử dụng.

ABSTRACT

We consider the initial-boundary value problem for the nonlinear wave equation

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} + f(u, u_t) = F(x,t),\ x \in \Omega = (0,1),\ 0 < t < T,\\
&u_x(0,t) = P(t),\ u(1,t) = 0,\\
&u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),
\end{aligned}$$

where u_0, u_1, b, f, F are given functions, the unknown function $u(x,t)$ and the unknown boundary value $P(t)$ satisfy the following nonlinear integral equation

$$P(t) = g(t) + H(u(0,t)) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds,$$

where g, H, k are given functions. We prove the existence and uniqueness of weak solutions to the problem, and discuss the stability of the solution (u, P) with respect to the functions $b,\ F, g,\ H$ and $k.$ In the proof, the Galerkin method is employed.

1. PHẦN MỞ ĐẦU

Trong báo cáo này, chúng tôi xét bài toán sau: Tìm một cặp các hàm (u, P) thỏa:

(1) $u_{tt} - u_{xx} + b(x,t)f(u,u_t) = F(x,t), \quad x \in \Omega = (0,1), \quad 0 < t < T,$

(2) $u_x(0,t) = P(t),$

(3) $u(1,t) = 0,$

(4) $u(x,0) = u_0(x), \; u_t(x,0) = u_1(x),$

trong đó u_0, u_1, b, f, F là các hàm cho trước thỏa các điều kiện mà ta sẽ chỉ ra sau. Hàm chưa biết $u(x,t)$ và giá trị biên chưa biết $P(t)$ thỏa một phương trình tích phân phi tuyến sau đây

(5) $P(t) = g(t) + H(u(0,t)) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds,$

trong đó g, H, k là các hàm cho trước.

Trong [2], Đặng Đình Áng và Alain Phạm Ngọc Định đã thiết lập định lý tồn tại và duy nhất nghiệm toàn cục cho bài toán giá trị biên và ban đầu (1)-(4) với u_0, u_1, P là các hàm cho trước và

(6) $\begin{cases} F(x,t) = 0, \; b(x,t) = 1, \\ f(u,u_t) = |u_t|^{\alpha-1} u_t, \; (0 < \alpha < 1). \end{cases}$

Bằng sự tổng quát hóa của [2], Long và Alain Phạm [7, 10, 11], Long và Thuyết [13], Long và Dũng [14], Long, Tâm và Trúc [15], Hóa và Ngọc [8] đã xét bài toán (1), (3), (4) với $b \equiv 1$ và liên kết với điều kiện biên không thuần nhất tại $x = 0$ có dạng

(7) $u_x(0,t) = g(t) + H(u(0,t)) - \int_0^t k(t-s, u(0,s))ds.$

Các tác giả trên đã lần lượt cứu xét nó trong [10] với $k \equiv 0$, $H(s)=hs$, trong đó $h > 0$; trong [7] với $k \equiv 0$; trong [10, 15] với $H(s) = hs$, trong đó $h>0$. Một số tính chất về compact và liên thông của tập nghiệm của bài toán (1)-(5) ứng với $b \equiv 1$ cũng được xét trong [8].

Trong trường hợp $b \equiv 1$, $H(s)=hs$, trong đó $h>0$, bài toán (1)-(5) được thành lập từ bài toán (1)-(4), trong đó, hàm chưa biết $u(x,t)$ và giá trị biên chưa biết $P(t)$ thỏa một bài toán Cauchy sau đây cho một phương trình vi phân thường

(8) $P''(t) + \omega^2 P(t) = hu_{tt}(0,t), \quad 0 < t < T,$

(9) $P(0) = P_0, \; P'(0) = P_1,$

trong đó $\omega > 0, \; h \geq 0, \; P_0, \; P_1$ là các hằng số dương cho trước [11].

Trong [1], Nguyễn Thúc An và Nguyễn Đình Triều đã nghiên cứu một trường hợp riêng của bài toán (1)-(4), (8), (9) với $u_0=u_1=P_0=0$ và với $b(x,t)f(u,u_t)-F(x,t)=f_1(u,u_t)$ tuyến tính, nghĩa là, $f_1(u,u_t)=Ku+\lambda u_t$, trong đó K, λ là các hằng số cho trước. Trong trường hợp sau, bài toán (1)-(4), (8) và (9) là mô hình toán học mô tả sự va chạm của một vật rắn và thanh đàn hồi nhớt tuyến tính tựa trên một nền cứng([1,19]). Như vậy bài toán nghiên cứu ở đây là phi tuyến tương tự bài toán được xét trong [1,19].

Trong trường hợp mà $b(x,t)f(u,u_t) - F(x,t) = |u_t|^{\alpha}\ sign(u_t),$ bài toán (1)-(4), (8) và (9) mô tả sự va chạm của một vật rắn và thanh đàn hồi nhớt tuyến tính với ràng buộc đàn hồi phi tuyến ở mặt bên, ràng buộc liên kết với lực cản ma sát nhớt. Từ (8), (9) ta biểu diễn *P*(*t*) theo $P_0,\ P_1,\ \omega,\ h,\ u_{tt}(0,t)$ và sau đó tích phân từng phần ta thu được

(10) $P(t) = g(t) + hu(0,t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds,$

trong đó

(11) $g(t) = (P_0 - hu_0(0))\cos\omega t + (P_1 - hu_1(0))\dfrac{\sin\omega t}{\omega},$

(12) $k(t) = h\omega\sin\omega t.$

Bằng cách khử ẩn hàm *P*(*t*), ta thay thế điều kiện biên (2) bởi

(13) $u_x(0,t) = g(t) + hu(0,t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds.$

Khi đó, chúng ta đưa bài toán (1)-(4), (8), (9) về (1)-(4), (10)-(12) hay (1), (3), (4), (11)-(13).
Trong [20], chúng tôi chứng minh bài toán (1)-(5) có duy nhất nghiệm yếu toàn cục và nghiệm này cũng ổn định với các hàm *g*, *H* và *k*.
Cũng cùng loại với bài toán trên, Long, Út và Trúc [16] đã cứu xét bài toán biên thuộc dạng
(14)

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu(t)u_{xx} + Ku + \lambda u_t = f(x,t),\ 0<x<1,\ 0<t<T, \\ u(0,t) = 0,\ -\mu(t)u_x(1,t) = Q(t), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \\ Q(t) = K_1(t)u(1,t) + \lambda_1(t)u_t(1,t) - g(t) - \int_0^t k(t-s)u(1,s)ds, \end{cases}$$

trong đó, $u_0,\ u_1, f,\ g,\ k,\ \mu,\ K_1,\ \lambda_1$ là các hàm cho trước, K, λ là các hằng số không âm cho trước.
Cũng vậy, Long, Định và Diễm [17] nghiên cứu bài toán biên phi tuyến dưới đây
(15)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + K|u|^{\alpha}u + \lambda|u_t|^{\beta}u_t = f(x,t),\ 0<x<1,\ 0<t<T, \\ -u_x(0,t) = P(t),\quad u_x(1,t) + K_1u(1,t) + \lambda_1u_t(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \\ P(t) = g(t) + hu(0,t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds, \end{cases}$$

trong đó, $u_0,\ u_1, f,\ g,\ k$ là các hàm cho trước, $h,\ K,\ K_1,\ \lambda_1,\ \lambda,\ \alpha$ và β là các hằng số không âm cho trước.

Báo cáo này gồm 2 phần. Phần 1, với một số giả thiết thích hợp trên $u_0, u_1, b, f, F, g, H, k$, chúng tôi chứng minh bài toán (1)- (5) có duy nhất một nghiệm yếu toàn cục. Chứng minh được dựa vào phương pháp Galerkin liên kết với các đánh giá tiên nghiệm cùng với kỹ thuật hội tụ yếu và về tính compact. Ở phần này, định lý Schauder cũng được sử dụng trong việc chứng minh tồn tại nghiệm xấp xỉ Galerkin. Một điều chú ý ở đây rằng phương pháp xấp xỉ tuyến tính trong các bài báo [6, 12, 15, 18] không sử dụng được trong bài này và trong các bài báo[2, 4, 5, 7, 10, 11, 13, 14]. Phần 2, chúng tôi chứng minh rằng nghiệm (u, P) của bài toán (1)-(5) là ổn định đối với các hàm b, F, g, H và k. Kết quả thu được ở trên đã tổng quát hóa tương đối các kết quả trong [1-3, 5-7, 10-20].

2. SỰ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM

Đầu tiên, ta đặt các ký hiệu sau $\Omega = (0,1)$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $T>0$, và bỏ qua định nghĩa các không gian hàm thông dụng: $C^m(\overline{\Omega})$, $L^p(\Omega)$, $H^m(\Omega)$, $W^{m,p}(\Omega)$. Để cho gọn, ta ký hiệu lại như sau $L^p(\Omega) = L^p$, $H^m(\Omega) = H^m$, $W^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}$. Chuẩn trong L^2 được ký hiệu $\|.\|$. Ta cũng dùng ký hiệu $\langle \cdot,\cdot \rangle$ cho tích vô hướng trong L^2 hoặc để chỉ cặp tích đối ngẫu của một phiếm hàm tuyến tính liên tục với một phần tử của không gian hàm. Ta ký hiệu $\|.\|_X$ để chỉ chuẩn trong một không gian Banach X và gọi X' không gian đối ngẫu của X. Ta ký hiệu $L^p\left(0,T;X\right)$, $1 \le p \le \infty$, là không gian các lớp tương đương chứa hàm $u:\left(0,T\right) \to X$ đo được, sao cho

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \left\|u\left(t\right)\right\|_X^p dt \right)^{1/p} < \infty, \text{ với } 1 \le p < \infty,$$

hay

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \|u(t)\|_X, \quad \text{với } p = \infty.$$

Ta định nghĩa

$$V = \{v \in H^1 : v(1) = 0\}$$

và

$$\langle u,v \rangle_V = \langle u', v' \rangle = \int_0^1 u'(x) v'(x) dx.$$

V là không gian con đóng của H^1, do đó, V là không gian Hilbert đối với tích vô hướng của H^1. Mặt khác trên V, $\|v\|_{H^1}$ và $\|v\|_V = \sqrt{\langle v', v' \rangle}$ là hai chuẩn tương đương. Hơn nữa, phép nhúng V Đ $C^0(\overline{\Omega})$ là compact và $\|v\|_{C^0(\overline{\Omega})} \le \|v\|_V$ với mọi $v \in V$. Mặt khác, nếu ta đồng nhất L^2 với đối ngẫu của nó, ta có V Đ L^2 Đ V', với các nhúng liên tục và nằm trù mật.

Ta cũng dùng các ký hiệu u(t), $u'(t) = u_t(t) = \dot{u}(t)$, $u''(t) = u_{tt}(t) = \ddot{u}(t)$, $u_x\left(t\right) = \nabla u\left(t\right)$, $u_{xx}\left(t\right) = \Delta u(t)$ để chỉ $u(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\left(x,t\right)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(x,t\right)$, $\frac{\partial u}{\partial x}\left(x,t\right)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x,t\right)$, lần lượt. Ta thành lập các giả thiết sau:

(A_1) $b \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,+\infty)),\ b \geq 0;$

(A_2) $u_0 \in H^1,\ u_1 \in L^2;$

(A_3) $g \in H^1(0,T)\ \ \forall T > 0;$

(A_4) $k \in H^1(0,T)\ \ \ \forall T > 0$ và $k(0) = 0;$

(A_5) $F \in L^2(Q_T),\ Q_T = \Omega \times (0,T);$

(A_6) Hàm số $H \in C^1(IR)$ thoả $H(0) = 0$ và tồn tại một hằng số $h_0 > 0$ sao cho

$$\hat{H}(\eta) = \int_0^{\eta} H(s)ds \geq -h_0, \text{ với mọi } \eta \in IR;$$

(F) Hàm số *f:* $IR^2 \to IR$ thoả $f(0,0) = 0$ và các điều kiện

(F_1) f là đơn điệu không giảm đối với biến thứ hai, tức là

$$(f(u,v) - f(u,\tilde{v}))(v - \tilde{v}) \geq 0,\ \forall u,\ v,\ \tilde{v} \in IR.$$

Tồn tại hai hằng số $\alpha,\ \beta \in (0,1]$ và hai hàm số liên tục B_1, B_2: $IR_+ \to IR_+$ sao cho

(F_2)

$$\left|f(u,v) - f(u,\tilde{v})\right| \leq B_1(|u|)\left|v - \tilde{v}\right|^{\alpha} \quad \forall u,\ v,\ \tilde{v} \in IR,$$

(F_3)

$$\left|f(u,v) - f(\tilde{u},v)\right| \leq B_2(|v|)\left|u - \tilde{u}\right|^{\beta} \quad \forall u,\ \tilde{u},\ v \in IR.$$

Khi đó ta có định lý sau.

Định lý 1. *Giả sử* (A_1)-(A_6) *và* (F_1)-(F_3) *đúng. Khi đó với mọi* $T > 0,$ *tồn tại một nghiệm yếu* (u,P) *của bài toán* (1)-(5) *sao cho*

$$u \in L^{\infty}(0,T;V),\ u_t \in L^{\infty}(0,T;L^2),\ u_t(0,t) \in L^2(0,T), \quad (16)$$

$$P \in H^1(0,T). \quad (17)$$

Hơn nữa, nếu $\beta = 1$ *trong* (F_3) *và các hàm số H,* B_2 *thoả thêm các điều kiện,*

(A_6') $H \in C^2(IR),\ H'(s) > -1 \qquad \forall s \in IR,$

(F_4) $B_2(|v|) \in L^2(Q_T) \quad \forall v \in L(Q_T), \forall T > 0.$

Khi đó nghiệm bài toán là duy nhất.

Chứng minh Định lý 1 được chứng minh chi tiết trong [20].■

Chú thích 1. Kết quả này mạnh hơn kết quả trong [10]. Thật vậy, tương ứng với cùng bài toán (1) – (5) với $k(t) \equiv 0$ và $H(s) = hs,\ h > 0,$ các giả thiết sau đây đã dùng trong [10] mà không cần thiết sử dụng ở đây:

$$0 < \alpha < 1, \quad (18)$$

$$B_1(|u|) \in L^{2/(1-a)}(Q_T) \quad \forall u \in L^{\infty}(0,T;V),\ \forall T > 0, \quad (19)$$

B_1, B_2 là các hàm không giảm.

Kết quả thu được ở đây đã tổng quát hóa kết quả trong [13] và chứa đựng trường hợp $b(x,t)=1$, $F(x,t)=0$ như là một trường hợp riêng.

Chú thích 2. Điều kiện $k(0) = 0$ trong (A_4) là kỹ thuật, ta có thể bỏ qua.
Trong trường hợp riêng của H với $H(s) = hs,\ h > 0,$ định lý sau đây là hệ quả của định lý 1.

Định lý 2.*Giả sử* (A_1)-(A_4) *và* (F_1)-(F_3) *đúng. Khi đó, với mỗi* $T > 0,$ *bài toán* (1)-(5) *có ít nhất một nghiệm yếu* (*u,P*) *thỏa* (16), (17).

Hơn nữa nếu $\beta = 1$ *trong* (F_3) *và hàm* B_2 *thỏa* (F_4), *khi đó nghiệm này là duy nhất.* ■

Định lý 2 cho cùng kết quả trong [11] nhưng giả thiết "B_1 không giảm" đã dùng trong [11] thì không cần thiết ở đây.

Trong trường hợp riêng với $k(t) \equiv 0$, kết quả sau đây là hệ quả của định lý 1.

Định lý 3. *Giả sử* (A_1), (A_2), (A_3), (A_5) *và* (F_1)-(F_3) *đúng. Khi đó với mỗi* $T > 0,$ *bài toán* (1)-(4) *tương ứng với P = g có ít nhất một nghiệm yếu thoả* (16).

Hơn nữa, nếu $\beta = 1$ *trong* (F_3) *và nếu các hàm H và* B_2 *lần lượt thỏa các giả thiết* $(A_6^{/})$ *và* (F_4), *khi đó nghiệm này là duy nhất.*

Chú thích 3. Giống như chú thích 2, định lý 3 cũng cho cùng kết quả trong [7] nhưng giả thiết: "B_1 không giảm" đã dùng trong [7] thì không cần thiết ở đây.

3. SỰ ỔN ĐỊNH NGHIỆM

Trong phần này, ta giả sử rằng $\beta = 1$ trong (F_3) và các hàm H, B_2 lần lượt thoả $(A_6^{/})$, (F_4). Do định lý 1 bài toán (1)-(5) có nghiệm duy nhất (u,P) phụ thuộc vào g, k, H. như sau: u = u(b,F,g,k,H), P = P(b,F,g,k,H), trong đó b, F, g, k, H thoả các giả thiết (A_1), (A_3)-(A_6) và u_0, u_1, f là các hàm cố định thoả (A_2), (F_1)-(F_4). Ta đặt

$$\Im(h_0,H_0) = \Big\{ H \in C^2(IR) : H(0) = 0,\ \int_0^x H(s)ds \geq -h_0,$$

$$H^{/}(x) > -1,\ \forall x \in IR,\ \sup_{|s|\leq M}(|H(s)| + |H^{/}(s)|) \leq H_0(M), \forall M > 0 \Big\},$$

trong đó $h_0 > 0$ là hằng số cho trước và $H_0 : IR_+ \to IR_+$ là hàm số cho trước.
Khi đó ta có định lý sau.

Định lý 4. *Giả sử* $\beta = 1$ *và* (A_2), (F_1)-(F_4) *đúng. Khi đó, với mỗi* T > 0, *nghiệm của bài toán* (1)-(5) *là ổn định đối với dữ kiện* b, F, g, k, H, *tức là, nếu* $(b,F,g,k,H),\ (b_j,F_j,g_j,k_j,H_j) \in C^0\left(\overline{\Omega}\times[0,T]\right)\times L^2(Q_T)\times H^1(0,T)\times H^1(0,T)\times \Im(h_0,H_0),$ $b,\ b_j \geq 0,\ k(0) = k_j(0) = 0,$ *sao cho* $(b_j,F_j,g_j,k_j,H_j) \to (b,F,g,k,H)$ *trong* $C^0\left(\overline{\Omega}\times[0,T]\right)\times L^2(Q_T)\times H^1(0,T)\times H^1(0,T)\times C^1([-M,M])$ *mạnh khi* j → +∞, *với mọi* M > 0.

Khi đó

(u_j, $u_j^{/}$, $u_j(0,t)$,P_j) $\rightarrow$ (u, $u^{/}$, $u(0,t)$, P) *trong* $L^\infty(0,T;V)\times L^\infty(0,T;L^2)\times C^0([0,T])\times C^0([0,T])$ *mạnh, khi* j $\rightarrow$ $+\infty$, *với mọi* M>0, *trong đó* $u_j = u(b_j,F_j,g_j,k_j,H_j)$, $P_j = P(b_j,F_j,g_j,k_j,H_j)$.

Chứng minh. Chứng minh Định lí 4 khá dài và chi tiết chứng minh sẽ được công bố nơi khác.■
Chú thích 4. Trong [20] chúng tôi đã chứng minh nghiệm của bài toán (1)-(5) là ổn định đối với ba hàm *g*, *k*, *H*, tức là , *nếu*

$$(g_j,k_j,H_j)\rightarrow(g,k,H) \quad \text{trong} \quad H^1(0,T)\times H^1(0,T)\times C^1([-M,M]) \quad \text{mạnh,}$$

khi j $\rightarrow$ $+\infty$*, với mọi M* >0.

Khi đó

$$(u_j,\ u_j^{/},\ u_j(0,t),P_j)\rightarrow(u,\ u^{/},\ u(0,t),\ P) \text{ trong}$$

$$L^\infty(0,T;V)\times L^\infty(0,T;L^2)\times C^0([0,T])\times C^0([0,T])$$

mạnh, khi j $\rightarrow$ $+\infty$, *với mọi* M, *trong đó* $u_j = u(b,F,g_j,k_j,H_j)$, $P_j = P(b,F,g_j,k_j,H_j)$, *b*, *F là hàm không âm, cố định cho trước thỏa* (A_1), (A_5).

TÀI LIỆU THAMKHẢO

[1] **Nguyễn Thúc An, Nguyễn Đình Triều**, *Shock between absolutely solid body and elastic bar with the elastic viscous frictional resistance at the side*, J. Mech. NCSR. Vietnam, **XIII** (2) (1991), pp.1-7.
[2] **Đặng Đình Áng, Alain Phạm Ngọc Định**, *Mixed problem for some semilinear wave equation with a nonhomogeneous condition*, Nonlinear Anal. **12** (1988), pp.581-592.
[3] **R. A. Adams**, *Sobolev Spaces*, Academic Press, NewYork, 1975.
[4] **Maitine Bergounioux, Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định**, *Mathematical model for a shock problem involving a linear viscoelastic bar*, Nonlinear Anal. **43** (2001), pp.547-561.
[5] **Alain Phạm Ngọc Định**, *Sur un problème hyperbolique faiblement nonlinéaire en dimension* 1, Demonstratio Math. **16** (1983), pp.269-289.
[6] **Alain Phạm Ngọc Định, Nguyễn Thành Long**, *Linear approximation and asymptotic expansion associated to the nonlinear wave equation in one dimension*, Demonstratio Math. **19** (1986), pp.45-63.
[7] **Alain Phạm Ngọc Định, Nguyễn Thành Long**, *The semilinear wave equation associated with a nonlinear boundary*, Demonstratio Math. **30** (1997), pp.557-572.
[8] **Lê Hoàn Hóa, Lê Thị Phương Ngọc**, *The connectivity and compactness of solution set of an integral equation and weak solution set of an initial boundary value problem,* Demonstratio Math., **39** (2006) (to appear).
[9] **J. L. Lions**, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires*, Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1969.
[10] **Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định**, *On the quasilinear wave:* $u_{tt}-\Delta u+f(u,u_t)=0$ *associated with a mixed nonhomogeneous condition*, Nonlinear Anal. **19** (1992), pp.613-623.
[11] Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, *A semilinear wave equation associated with a linear differential equation with Cauchy data,* Nonlinear Anal. **24** (1995), pp.1261-1279.
[12] **Nguyễn Thành Long, Trần Ngọc Diễm**, *On the nonlinear wave equation* $u_{tt}-u_{xx}=f(x,t,u,u_x,u_t)$ *associated with the mixed homogeneous conditions*, Nonlinear Anal. **29** (1997), pp.1217-1230.
[13] **Nguyễn Thành Long, Trần Minh Thuyết**, *A semilinear wave equation associated with a nonlinear integral equation*, Demonstratio Math. **36** (2003), No.4, pp.915-938.

[14] **Nguyễn Thành Long, Bùi Tiến Dũng**, *A nonlinear wave equation associated with a nonlinear integral equation involving boundary value*, Electronic J. Differential Equations, Vol. **2004** (2004), No. 103, pp.1-21. ISSN: 1072-6691. URL:http://ejde.math.txstate.edu or http://ejde.math.unt.edu.
[15] **Nguyễn Thành Long, Nguyễn Công Tâm, Nguyễn Thị Thảo Trúc**, *On the nonlinear wave equation with the mixed nonhomogeneous conditions: Linear approximation and asymptotic expansion of solution*, Demonstratio Math., **38** (2005), No.2, pp.365-386.
[16] **Nguyễn Thành Long, Lê Văn Út, Nguyễn Thị Thảo Trúc**, *On a shock problem involving a linear viscoelastic bar*, J. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Series A: Theory and Methods, **63**, No. 2 (2005), pp.198-224.
[17] **Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, Trần Ngọc Diễm**, *On a shock problem involving a nonlinear viscoelastic bar*, J. Boundary Value Problems, (2005) (đã nhận đăng).
[18] **E.L. Ortiz, Alain Phạm Ngọc Định**, *Linear recursive schemes associated with some nonlinear partial differential equations in one dimension and the Tau method*, SIAM J. Math. Anal. **18** (1987), pp.452-464.
[19] **Nguyễn Phú Vinh**, *Dao động của vật rắn và thanh đàn hồi với ràng buộc đàn hồi nhớt ở mặt bên*, Tạp chí Phát triển Khoa học Công nghệ, ĐHQG Tp. HCM, Tập **6**, Số 12, (2003), pp.5-14.
[20] **Phạm Gia Khánh**, *Phương trình sóng phi tuyến với điều kiện biên chứa phương trình tích phân phi tuyến*, Luận văn Thạc sỹ, Đại học Cần Thơ, (2005), 52 trang.