

TÍNH TOÁN ẢNH HƯỞNG CỦA THỦY TRIỀU ĐẾN CHẾ ĐỘ ẨM CỦA NỀN ĐƯỜNG Ở ĐỒNG BẰNG NAM BỘ

Nguyễn Duy Chí

Công ty tư vấn thiết kế GTVT phía Nam, Tp. Hồ Chí Minh, Việt Nam

Đặt vấn đề và thiết lập phương trình truyền dẫn ẩm

Đồng bằng Nam bộ là khu vực quan trọng và chiếm một phần diện tích rất lớn của Việt Nam. Do là khu vực thấp và nằm giáp biển từ 3 phía, nước biển qua hệ thống sông ngòi chằng chịt gây tác động đến phần lớn diện tích khu vực.

Đặc điểm đặc trưng khác của khu vực này là sự có mặt của lớp đất yếu dày dưới nền. Trong điều kiện ấy, thân đường thường được đắp bằng cát. Theo tiêu chuẩn thiết kế, chiều cao tối thiểu của thân đường được xác định từ 2 điều kiện:

- Đáy kết cấu áo đường cần được nâng cao so với mực nước thường xuyên hay mực nước ngầm một trị số cần thiết tùy thuộc vào loại đất thân đường;

- Vai đường cần được nâng cao so với mực nước cao nhất, có xét đến chiều cao sóng leo, tối thiểu 0.5m.

Tuy nhiên đối với khu vực này, điều kiện không chế trong phần nhiều trường hợp là điều kiện 1. Trong thực tế hiện nay, mực nước tính toán khi xác định cao độ đường thường được xem là mực nước triều cao (thường được lấy với tần suất 10%).

Ảnh hưởng của thủy triều biển đến độ ẩm của đất thân đường, về nguyên tắc, không chỉ phụ thuộc vào mực nước cao nhất, mà còn phụ thuộc cả vào thời gian tác động của mỗi lần dâng-rút. Do tác động của mỗi chu kỳ nước dâng là ngắn hạn, có thể cho rằng ảnh hưởng của thủy triều đến độ ẩm của đất thân đường là không lớn. Vì lý do đó, việc sử dụng mực nước triều cao làm mực nước tính toán là quá an toàn, làm tăng quá mức cần thiết khối lượng nền đường và giá thành xây dựng.

Việc nghiên cứu khả năng giảm bớt chiều cao đắp thân đường có ý nghĩa thực tế quan trọng vì những lý do sau:

- Đối với đồng bằng Nam bộ, cát là vật liệu đất tiền do trữ lượng ít và thường phải vận chuyển từ xa.

- Trên nền đất yếu với khả năng biến dạng lớn, do phải đảm bảo ổn định và tiến độ kiểm soát lún đã định trước, việc tăng chiều cao đắp sẽ làm tăng giá thành xử lý nền; nhất là khi không thể sử dụng các giải pháp xử lý thông thường cho nền đắp thấp, mà phải chuyển sang sử dụng giải pháp phức tạp và đắt tiền hơn dành cho nền đắp cao.

- Do mạng lưới đường trong khu vực còn kém phát triển, mỗi tuyến đường mới theo thời gian đều trở thành một trục phát triển dân cư, khi đó cao độ san nền của các khu dân cư mới sẽ phụ thuộc nhiều vào cao độ mặt đường mới mở.

Để giảm khối lượng nền, cần phải giảm chiều cao đắp. Căn cứ để làm việc đó là phải biết được biến thiên độ ẩm trong thân đường, nghĩa là phải nghiên cứu quá trình truyền dẫn ẩm. Tuy nhiên bài toán cụ thể về quá trình truyền dẫn ẩm dưới tác động ngắn hạn và mang tính tuần hoàn như tác động của thủy triều biển lại chưa được nghiên cứu.

Về nguyên tắc, việc truyền dẫn nhiệt và ẩm là những quá trình xảy ra đồng thời và liên hệ lẫn nhau. Để rõ thêm có thể trích dẫn ra dưới đây các biểu thức nhiệt động lực của các quá trình truyền dẫn đó từ lý thuyết truyền dẫn nhiệt và vật chất của nhà bác học Nga Lurcôv A.V. [5]:

$$X_t = -\frac{1}{t} \nabla t, \quad (1)$$

$$X_B = -\nabla \mu + \frac{\mu}{t} \nabla t, \quad (2)$$

trong đó $\nabla = 1_x \frac{\partial}{\partial x} + 1_y \frac{\partial}{\partial y}$ (với bài toán 2 chiều) – toán tử Hamintôn,

t - nhiệt độ tuyệt đối (theo Kenvin),

$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right)$ - năng lượng riêng F của khối vật chất chuyển động (tính cho 1 đơn vị khối lượng v),

$\vec{1}_x$ và $\vec{1}_y$ các véc tơ đơn vị tương ứng theo các chiều x và y .

Do quá phức tạp, khi dự báo trạng thái thủy-nhiệt trong thân đường người ta đều phải chấp nhận nhiều giả thiết đơn giản hóa. Hướng nghiên cứu truyền thống là xem kết cấu thân và áo đường như một hệ thống nhiều thành phần và nhiều pha. Trạng thái ẩm thường được xác định bởi thành phần của pha nước (lỏng, khí, băng). Để mô tả động học trạng thái này thường người ta xác định trong mỗi trường hợp cụ thể cơ chế truyền dẫn áp đảo: khuếch tán, màng, mao dẫn hoặc hấp dẫn. Trong rất nhiều nghiên cứu lý thuyết về trạng thái thủy-nhiệt của đường hiện nay, **độ ẩm được xem là thế năng truyền dẫn ẩm**.

Điều kiện đặc thù của khu vực (và hầu như của toàn lãnh thổ Việt nam) là nhiệt độ (theo thang bách phân) luôn dương, gradien nhiệt trong thân đường không lớn. Trong điều kiện như vậy, có thể bỏ qua ảnh hưởng của quá trình truyền nhiệt để xem xét quá trình truyền dẫn ẩm một cách độc lập. Cơ chế truyền dẫn ẩm chủ yếu là cơ chế tác dụng của lực hấp dẫn và lực mao dẫn, việc truyền dẫn nước tự do và nước mao dẫn được xem như một quá trình duy nhất và tuân thủ định luật thấm Darsi. Thế năng truyền chuyển động trong quá trình đó là năng lượng riêng của dòng ẩm. Bằng cách bỏ qua động năng của dòng ẩm vì nó quá nhỏ, năng lượng riêng của dòng ẩm được biểu diễn dưới dạng sau [2]:

$$h = y + \frac{p_w}{\rho_w g}, \quad (3)$$

Trong đó:

h : - năng lượng riêng của dòng ẩm (thường còn được gọi là cột nước áp);
 y cao độ của điểm đang xét,
 p_w áp suất nước lỗ rỗng ở điểm đang xét,
 ρ_w trọng lượng thể tích của nước,
 g gia tốc trọng trường.

Từ định luật thấm Darsi và điều kiện liên tục của dòng ẩm, có thể thiết lập được phương trình vi phân của dòng ẩm không ổn định trong thân đường như sau:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad (4)$$

Điểm đặc biệt trong phương trình (4) là sự tồn tại của đối không bão hòa trong thân đường. Tính chất của đất ở đó thay đổi trong mối tương quan chặt chẽ với hiện tượng mao dẫn và là hàm số của độ hút dính:

$$\psi = p_a - p_w$$

Trong đó:

ψ - độ hút dính của đất;
 p_a - áp suất khí lỗ rỗng trong đất;
 p_w - áp suất nước lỗ rỗng.

Ở vùng dưới mực nước trong thân đường, đất ở trạng thái bão hòa nước, áp suất nước lỗ rỗng bằng áp suất khí lỗ rỗng, độ hút dính ψ bằng 0, hệ số thấm k là hằng số. Từ mực nước trở lên là vùng không bão hòa, áp suất khí lỗ rỗng bằng áp suất khí quyển (được xem như bằng 0), áp suất nước lỗ rỗng nhỏ hơn áp suất khí quyển (tức là $p_w < 0$) và giảm dần khi lên cao, độ hút dính ψ do vậy lớn hơn 0, hệ số thấm k là đại lượng biến thiên tùy theo độ ẩm W , trong khi độ ẩm W lại giảm dần cùng với áp suất nước lỗ rỗng (là hàm số của độ hút dính ψ). Mặt nước ngầm trong đất được xác định bởi điều kiện $p_w = 0$. Với nhận xét trên, để thuận tiện hơn cho việc phân tích, phương trình (4) có thể biến đổi về dạng sau:

$$\rho_w g \frac{dW}{dp_w} \frac{dh}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad (5)$$

Số liệu của bài toán bao gồm:

- Quan hệ biến thiên mực nước triều bên ngoài thân đường theo thời gian:

$$H = H(t) \quad (6)$$

- Các quan hệ thể hiện tính thấm của đất thân đường (phụ thuộc vào loại đất cụ thể và được xác định bằng phương pháp thực nghiệm [1], [2]):

$$W = f_1(\psi) \quad (7)$$

$$k = k(W) = f_2(\psi) \quad (8)$$

Phương pháp giải phương trình truyền dẫn ẩm

Để giải phương trình vi phân (5), trước tiên cần xác định điều kiện ban đầu và các điều kiện biên. Do đặc điểm tuần hoàn của thủy triều, điều kiện ban đầu của bài toán có thể cho tùy ý, vì sau một khoảng thời gian nào đó, chế độ biến thiên ẩm trong thân đường sẽ trở nên ổn định. Ví dụ có thể cho:

$$h|_{t=0} = h_0 \text{ (= hằng số)} \tag{9}$$

Các điều kiện biên của bài toán này như sau:

- Dưới đáy thân đường:

$$\frac{\partial h}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \tag{10}$$

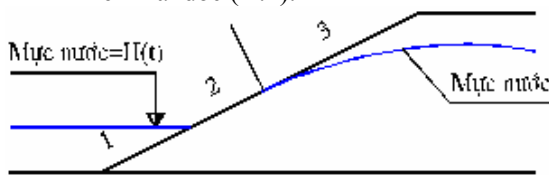
- Trên bề mặt thân đường:

$$-k \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_{y=h_n} = V_y \tag{11}$$

Trong đó:

h_n chiều cao thân đường,
 V_y vận tốc dòng trao đổi độ ẩm với không khí (được coi là bằng 0 trong bài toán này).

- Trên mái dốc (H.1):



H.1: Các phần mái dốc với những điều kiện biên khác nhau

- Đối với phần nằm dưới mực nước (phần 1):

$$h = H(t) \tag{12}$$

- Đối với phần có nước từ thân đường thoát ra (phần 2):

$$h = y \tag{13}$$

- Đối với phần tự do (phần 3):

$$-k \frac{\partial h}{\partial n} = V_n \tag{14}$$

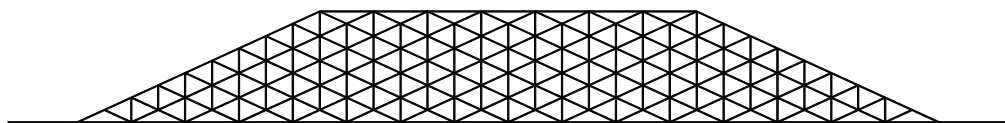
Trong đó:

n hướng pháp tuyến đối với mái dốc,
 V_n vận tốc dòng ẩm qua mái dốc theo hướng của pháp tuyến đó (được xem là bằng 0).

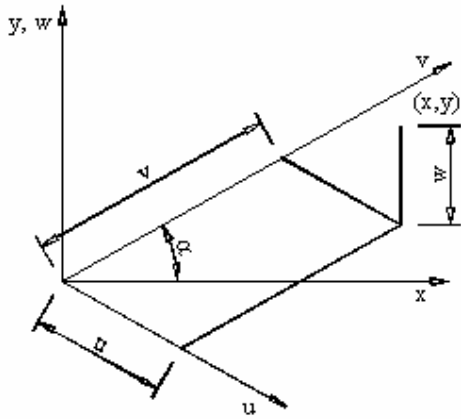
Phần 2 chỉ được xác định trong thời gian tính toán. Ở những bước lập đầu tiên, đối với toàn bộ phần mái dốc nằm trên mực nước đều áp dụng điều kiện (14). Chỉ từ bước lập thứ 2, nếu áp suất nước lỗ rỗng ở chỗ nào đó trên phần mái dốc nằm trên mực nước lại dương thì trong quá trình tính toán tiếp theo, điều kiện (14) được thay bằng điều kiện (13).

Để giải phương trình (5) tác giả đã sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn với lưới rời rạc tam giác như trên H. 2.

Bằng cách chuyển sang hệ tọa độ tam giác u, v, w như trên H. 3, phương trình (5) có thể biến đổi thành (15). Tiếp theo đó, bằng cách thay thế các đạo hàm riêng trong (15) bằng những biểu thức sai phân, đồng thời khử các điều kiện biên, có thể thu được các phương trình sai phân cho tất cả các nút. Các phương trình ấy được thông kê trong phần phụ lục.



H.2: Lưới tam giác để rời rạc hóa bài toán



H.3: Hệ tọa độ tam giác

$$\rho_w g \frac{\partial W}{\partial p} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\frac{\partial}{\partial u} \left(k \frac{\partial h}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(k \frac{\partial h}{\partial v} \right)}{2 \cos^2 \alpha} + \frac{2 \cos 2\alpha \frac{\partial}{\partial w} \left(k \frac{\partial h}{\partial w} \right)}{2 \cos^2 \alpha} \quad (15)$$

Để thuận tiện cho việc trình bày tiếp theo, ta sẽ viết hệ phương trình sai phân thu được cho tất cả các nút lưới dưới dạng toán tử:

$$D^{n+1} \frac{h^{n+1} - h^n}{\tau} = K^{n+1} h^{n+1} + \varphi^{n+1}$$

Trong đó:

- D^{n+1} : ma trận vuông dạng đường chéo, với các phần tử d_{ii}^{n+1} là trị số đạo hàm $\frac{\partial W}{\partial p}$ tại nút i ở lớp thời gian $n+1$, tức là:

$d_{ii}^{n+1} = f_i^{n+1} = \rho_w g \frac{\partial W}{\partial p} \Big|_i^{n+1}$ (với trọng số xét tới diện tích của các phần tử bao quanh nút i);

- K^{n+1} : ma trận vuông nhận được khi xấp xỉ về phải của phương trình (15), phần tử k_{ij}^{n+1} của nó (với $i \neq j$) được tính theo trị số hệ số thấm tại điểm giữa đoạn thẳng nối nút thứ i với nút thứ j , còn $k_{ii}^{n+1} = -\sum_{i \neq j} k_{ij}^{n+1}$;

- h^{n+1} : véc tơ, với các phần tử h_i^{n+1} là trị số cột nước áp tại nút thứ i ở lớp thời gian $n+1$;

- φ^{n+1} : véc tơ thu được khi xử lý các điều kiện biên.

Quá trình tính toán được thực hiện theo sơ đồ sau:

$$h^0 = h^{(t=0)}$$

$$D^{n+1} \frac{h^{n+1} - h^n}{\tau} = K^{n+1} h^{n+1} + \varphi^{n+1} \quad (16)$$

với:

$$D^{n+1} = D(p^{n+1})$$

$$K^{n+1} = K(p^{n+1})$$

trong đó:

$$p^{n+1} = \rho_w g \left(\frac{h^{n+1} + h^n}{2} - y \right)$$

Phương trình (16) là phi tuyến đối với véc tơ cần tìm trên mỗi lớp $z = h^{n+1}$, quá trình tìm z tại mỗi lớp thời gian mới được thực hiện theo trình tự:

$$z \rightarrow D, K, \varphi \rightarrow z$$

Nói một cách khác tại mỗi lớp thời gian mới, véc tơ z sẽ là nghiệm của một phương trình toán tử nào đó dạng:

$$z = f(z)$$

Để giải phương trình toán tử đó (cho mỗi lớp thời gian mới) ta lại sử dụng sơ đồ tính toán sau:

1. Gán cho z giá trị xấp xỉ ban đầu $z^0 = h^n$, theo đó xác định các ma trận D, K và véc tơ u ;

2. Giải phương trình $D \frac{f^0 - h^n}{\tau} = K f^0 + \varphi$

để xác định f^0 ;

3. Với $t = 1$ cho $z^t = f^{t-1}$;

4. Theo giá trị xấp xỉ mới của z , xác định lại D, K và u ;

5. Giải phương trình $D \frac{f^t - h^n}{\tau} = K f^t + \varphi$

để xác định f^t ;

6. Xác định giá trị xấp xỉ tiếp theo của z theo công thức:

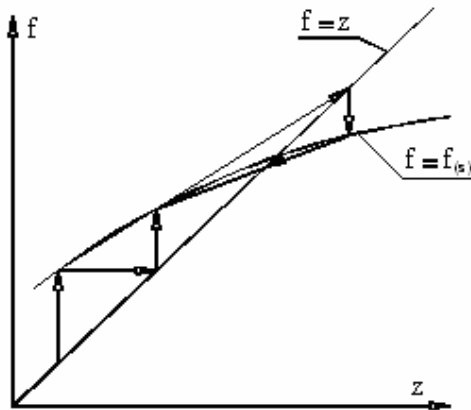
$$z_i^{t+1} = z_i^t + \alpha_i (f_i^t - z_i^t)$$

trong đó:

$$\alpha_i = \frac{1}{1 - \frac{f_i^t - z_i^t}{z_i^t - z_i^{t-1}}}$$

Lặp lại quá trình từ bước thứ 4 với $t=t+1$, cho đến khi chưa thỏa mãn điều kiện $\|z^t - f^t\| < \varepsilon$, trong đó $\|z^t - f^t\|$ là chuẩn của sai số $z^t - f^t$. Trường hợp ngược lại thì kết thúc quá trình với $z = f^t$.

Quá trình vừa trình bày có thể mô tả bằng sơ đồ trên H.4.



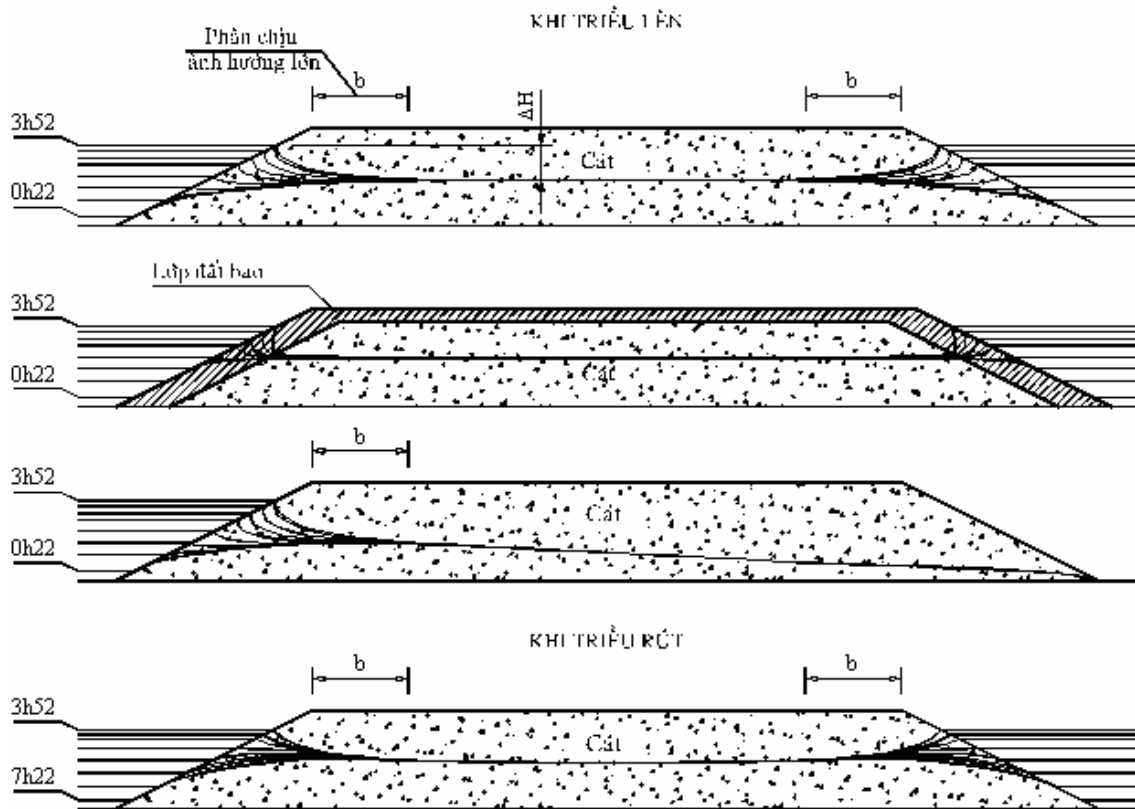
H.4: Trình tự tìm kiếm véc tơ chưa biết z tại mỗi lớp

Chuẩn của sai số đã được chọn như sau:

$$\|z^t - f^t\| = \max_i |z_i^t - f_i^t|$$

Bằng chương trình tính toán theo thuật toán trên, tác giả đã tiến hành tính toán nhiều kết cấu thân đường, với nhiều loại cát đắp, bề rộng đường và chiều sâu ngập tối đa khác nhau, có và không có lớp gia cố mái ta luy, tác dụng của nước ngập từ 1 và 2 phía, có và không có thiết bị tiêu nước ngầm. Với mỗi trường hợp, mực nước trong thân đường được xác định sau mỗi 0.1h, đồng thời có thể xem xét sự biến thiên của trường âm trong đó theo thời gian. Các kết quả đó có thể được xem một cách trực quan dưới dạng phim quay nhanh. Một số ví dụ về sự thay đổi mực nước sau mỗi 0.5h được trình bày trên H.5. Trên cơ sở phân tích các kết quả thu được có thể rút ra các kết luận sau:

- Với tất cả các loại cát đắp thông thường ở Nam bộ, nước thủy triều chỉ gây ra trạng thái ẩm thay đổi ở phần bên ngoài của thân đường (với chiều rộng ảnh hưởng ký hiệu bởi chữ b trên H.5), chiều rộng phần này thường không vượt quá 2m, tức là không quá chiều rộng lề đường. Ở phần giữa của thân đường mực nước ổn định hơn và luôn thấp hơn mực nước triều cao.
- Khi thân đường (đắp bằng cát) được bao gia cố bằng đất dính với tính thấm nhỏ hơn thì chiều rộng phần bên ngoài với trạng thái ẩm thay đổi giảm xuống đáng kể, còn mực nước ổn định ở phần giữa của thân đường lại không khác đi nhiều so với trường hợp không có lớp gia cố.

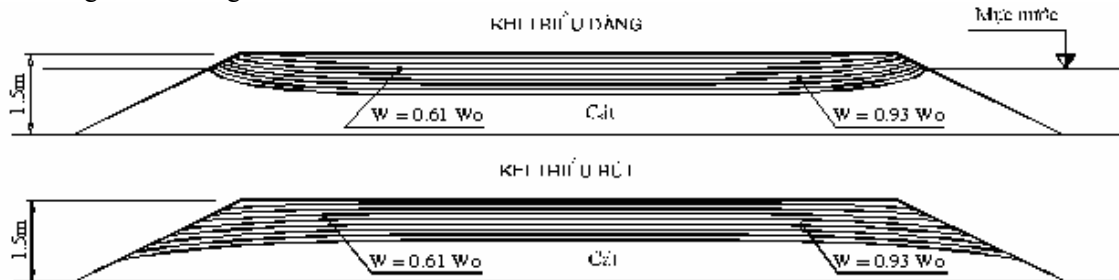


H.5: Biến thiên mực nước sau những khoảng thời gian $\Delta t = 0.5h$

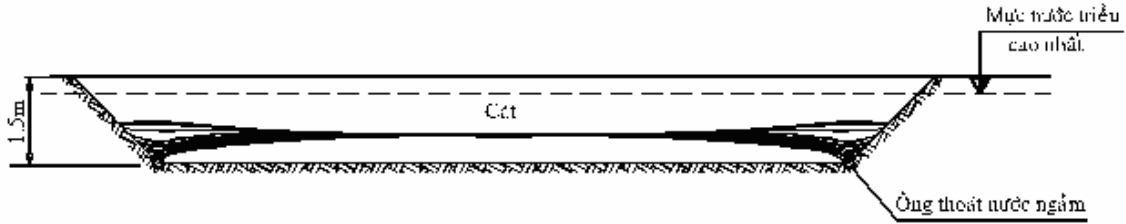
Việc tính toán trên mô hình cũng cho thấy, mặc dù biến thiên mực nước triều không phải là tuần hoàn theo nghĩa tuyệt đối, vẫn có thể xem diễn biến mực nước trong 1 ngày của tháng triều cường với trị số mực nước triều cao bằng trị số trung bình của tháng đó như là diễn biến của một chu trình tuần hoàn để đơn giản hóa việc thu thập và nhập số liệu tính toán. Nhờ việc mô hình hóa, cũng có thể phân tích sự phân bố ẩm trong thân đường thông qua các đường đồng mức hút dính - đồng mức ẩm. Một số ví dụ về phân bố ẩm trong thân đường được thể hiện trên H. 6.

Các kết quả đó có thể sử dụng để chính xác lại các chỉ tiêu về cường độ của thân đường khi thiết kế áo đường.

Mô hình cũng cho phép đánh giá hiệu quả làm việc của các thiết bị tiêu nước ngầm trong điều kiện chịu tác động thay đổi của thủy triều (H. 7). Cũng tương tự như khi chịu tác động từ phía mái dốc, mực nước trong thân đường khi có tác động của thủy triều qua các thiết bị tiêu nước ngầm vẫn luôn thấp hơn so với mực nước triều cao.



H.6: Các đường đồng mức ẩm



H.7: Biến thiên mực nước trong thân đường khi chịu tác động của thủy triều qua thiết bị tiêu nước ngầm

Các kết quả tính với số liệu từ những điều kiện thực tế sẽ mở ra khả năng giảm bớt chiều cao đắp của thân đường, nhờ đó sẽ giảm bớt khối lượng và kinh phí xây dựng trên những khu vực chịu ảnh hưởng của thủy triều.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ASTM 2325-68 "Standard test method for capillary moisture relationships for coarse and medium textured soils by porous plate apparatus", 1985. Annual book of ASTM Standards, Vol. 04.08.
2. Fredlund D. G., Rahardjo H. Soil mechanics for unsaturated soils. JOHN WILEY & SONS - 1993. New York - Chichester - Brisbane - Toronto - Singapore.
3. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П. и Кобельков Г. М. Численные методы. М., "Лаборатория базовых знаний", 2002.
4. Калиткин Н. Н. Численные методы. М., "Наука", 1978.
5. Лыков А. В., Михайлов Ю. А. Теория тепло и массопереноса. М-Л., Госэнергоиздат, 1963.
6. Мак-кракен Д. и Дорн У. Численные методы и программирование на Фортране. Пер. с англ. Казака Б. Н., М., "Мир", 1977.
7. Самарский А. А. и Вабищевич П. Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М., "Эдиториал УРСС", 1999.

Phụ lục:

CÁC PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN

Vị trí nút	Phương trình
Cách xa biên	$q_{u,v,w} \frac{h^{n+1}_{u,v,w} - h^n_{u,v,w}}{\tau} = \frac{2}{m^2 b^2} \left[\Delta_{uu} + \Delta_{vv} + \frac{m^2 - 1}{2} \Delta_{ww} \right]$
Trên mặt nền	$\frac{q_{u,v,w}}{2} \frac{h^{n+1}_{u,v,w} - h^n_{u,v,w}}{\tau} = \frac{2}{m^2 b^2} \left[\Lambda^+_{uu} + \Lambda^-_{vv} + \frac{m^2 - 1}{2} \Lambda^-_{ww} \right] + \frac{m^2 + 1}{2m^2 b} V_y$
Sát mặt nền	$\frac{5q_{u,v,w}}{6} \frac{h^{n+1}_{u,v,w} - h^n_{u,v,w}}{\tau} = \frac{2}{m^2 b^2} \left[\Delta_{uu} + \Delta_{vv} + \frac{m^2 - 1}{2} \Lambda^-_{ww} \right] + \frac{m^2 - 1}{2m^2 b} V_y$
Dưới đáy nền	$\frac{q_{u,v,w}}{2} \frac{h^{n+1}_{u,v,w} - h^n_{u,v,w}}{\tau} = \frac{2}{m^2 b^2} \left[\Lambda^-_{uu} + \Lambda^+_{vv} + \frac{m^2 - 1}{2} \Lambda^+_{ww} \right]$
Sát đáy nền	$\frac{5q_{u,v,w}}{6} \frac{h^{n+1}_{u,v,w} - h^n_{u,v,w}}{\tau} = \frac{2}{m^2 b^2} \left[\Delta_{uu} + \Delta_{vv} + \frac{m^2 - 1}{2} \Lambda^+_{ww} \right]$
Trên taluy phải	$\frac{q_{u,v,w}}{2} \frac{h^{n+1}_{u,v,w} - h^n_{u,v,w}}{\tau} = \frac{2}{m^2 b^2} \left[0.5\Delta_{uu} + \Lambda^-_{vv} + \frac{m^2 - 1}{2} \Lambda^-_{ww} \right] + \frac{\sqrt{m^2 + 1}}{mb} V_n$

Trên taluy trái	$\frac{q_{u,v,w}}{2} \frac{h^{n+1}_{u,v,w} - h^n_{u,v,w}}{\tau} = \frac{2}{m^2 b^2} \left[\Lambda^+_{uu} + 0.5 \Delta_{vv} + \frac{m^2 - 1}{2} \Lambda^-_{ww} \right] + \frac{\sqrt{m^2 + 1}}{mb} V_n$
Góc trên phải	$\frac{2.5q_{u,v,w}}{6} \frac{h^{n+1}_{u,v,w} - h^n_{u,v,w}}{\tau} = \frac{2}{m^2 b^2} \left(0.5 \Lambda^+_{uu} + \Lambda^-_{vv} + \frac{m^2 - 1}{2} \Lambda^-_{ww} \right) + \frac{\sqrt{m^2 + 1}}{2mb} V_n + \frac{m^2 + 1}{2m^2 b} V_y$
Góc trên trái	$\frac{2.5q_{u,v,w}}{6} \frac{h^{n+1}_{u,v,w} - h^n_{u,v,w}}{\tau} = \frac{2}{m^2 b^2} \left(\Lambda^+_{uu} + 0.5 \Lambda^-_{vv} + \frac{m^2 - 1}{2} \Lambda^-_{ww} \right) + \frac{\sqrt{m^2 + 1}}{2mb} V_n + \frac{m^2 + 1}{2m^2 b} V_y$
Góc dưới phải	$\frac{0.5q_{u,v,w}}{6} \frac{h^{n+1}_{u,v,w} - h^n_{u,v,w}}{\tau} = \frac{1}{m^2 b^2} \Lambda^-_{uu} + \frac{\sqrt{m^2 + 1}}{2mb} V_n$
Góc dưới trái	$\frac{0.5q_{u,v,w}}{6} \frac{h^{n+1}_{u,v,w} - h^n_{u,v,w}}{\tau} = \frac{1}{m^2 b^2} \Lambda^+_{vv} + \frac{\sqrt{m^2 + 1}}{2mb} V_n$

Các ký hiệu:

τ - bước thời gian,

b - bước theo trục w ,

m - độ dốc mái taluy,

$q_{u,v,w} = \rho_w g \frac{\partial W}{\partial p} \Big|_{u,v,w}$,

$$\Lambda^+_{uu} = k_{u+0.5,v,w} (h^{n+1}_{u+1,v,w} - h^{n+1}_{u,v,w}), \quad \Lambda^-_{uu} = k_{u-0.5,v,w} (h^{n+1}_{u-1,v,w} - h^{n+1}_{u,v,w}),$$

$$\Lambda^+_{vv} = k_{u,v+0.5,w} (h^{n+1}_{u,v+1,w} - h^{n+1}_{u,v,w}), \quad \Lambda^-_{vv} = k_{u,v-0.5,w} (h^{n+1}_{u,v-1,w} - h^{n+1}_{u,v,w}),$$

$$\Lambda^+_{ww} = k_{u,v,w+0.5} (h^{n+1}_{u,v,w+1} - h^{n+1}_{u,v,w}), \quad \Lambda^-_{ww} = k_{u,v,w-0.5} (h^{n+1}_{u,v,w-1} - h^{n+1}_{u,v,w}),$$

$$\Delta_{uu} = \Lambda^+_{uu} + \Lambda^-_{uu}, \quad \Delta_{vv} = \Lambda^+_{vv} + \Lambda^-_{vv}, \quad \Delta_{ww} = \Lambda^+_{ww} + \Lambda^-_{ww}.$$