MÔ HÌNH TOÁN HỌC BÀI TOÁN VA CHẠM CHỨA THANH ĐÀN HỒI NHỚT
MATHEMATICAL MODEL FOR A SHOCK PROBLEM INVOLVING A NONLINEAR VISCOELASTIC BAR

Trần Ngọc Diễm*, Alain Phạm Ngọc Định**

* Khoa Khoa học Ứng dụng, Đại học Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh, Việt nam
** MAPMO, UMR 6628, Bâtiment de Mathématiques, Université d'Orléans, BP 6759, 45067 Orléans Cedex 2, France
Email: alpham@worldonline.fr

BẢN TÓM TẮT

Chúng tôi xét bài toán giá trị biên-đầu cho phương trình sóng phi tuyến $u_{tt} - u_{xx} + K|u|^{\alpha-2}u + \lambda|u_t|^{\beta-2}u_t = f(x,t)$ trong miền $0 < x < 1,\ 0 < t < T.$ Điều kiện biên tại điểm $x = 0$ chứa số hạng tích chập theo biến thời gian của giá trị biên của u tại $x = 0$ ngược lại Điều kiện biên tại điểm $x = 1$ có dạng $u_x(1,t) + K_1 u(1,t) + \lambda_1 u_t(1,t) = 0$ với K_1 và λ_1 là các hằng số không âm cho trước. Chúng tôi chứng minh bài toán như thế có nghiệm duy nhất trong các không gian Sobolev cổ điển. Chứng minh dựa vào phương pháp xấp xỉ Galerkin, một số đánh giá năng lượng và lý luận về tính compact. Trong trường hợp $\alpha = \beta = 2,$ tính trơn của nghiệm cũng được nghiên cứu. Cuối cùng, chúng tôi cũng thu được một khai triển tiệm cận nghiệm (u,P) của bài toán đến cấp $N+1$ theo haai tham số $K,\ \lambda.$

ABSTRACT

We consider an initial boundary value problem for a nonlinear wave equation $u_{tt} - u_{xx} + K|u|^{\alpha-2}u + \lambda|u_t|^{\beta-2}u_t = f(x,t)$ in the domain $0 < x < 1, 0 < t < T.$ The boundary condition at the boundary point $x = 0$ of the domain for a solution u involves a time convolution term of the boundary value of u at $x = 0$ whereas the boundary condition at the other boundary point is of the the form $u_x(1,t) + K_1 u(1,t) + \lambda_1 u_t(1,t) = 0$ with K_1 and λ_1 given non-negative constants. We prove existence of a unique solution of such a problem in classical Sobolev spaces. The proof is based on a Galerkin type approximation, various energy estimates and compactness arguments. In the case of $\alpha = \beta = 2,$ the regularity of solutions is studied also. Finally, we obtain an asymptotic expansion of the solution (u,P) of this problem up to order $N+1$ in two small parameters $K,\ \lambda.$

1. GIỚI THIỆU

Trong báo cáo này chúng tôi xét bài toán sau: tìm cặp hàm số (u,P) sao cho

$$u_{tt} - u_{xx} + F(u,u_t) = f(x,t),\ x \in \Omega = (0,1), 0 < t < T, \quad (1)$$
$$u_x(0,t) = P(t), \quad (2)$$
$$u_x(1,t) + K_1 u(1,t) + \lambda_1 u_t(1,t) = 0, \quad (3)$$
$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \quad (4)$$
$$F(u,u_t) = K|u|^{\alpha-2}u + \lambda|u_t|^{\beta-2}u_t, \quad (5)$$

trong đó u_0, u_1, f là các hàm số cho trước và $K, K_1, \lambda \ge 0, \lambda_1 > 0$ và $\alpha, \beta \ge 2$ là các hằng số cho trước, hàm phải tìm $u(x,t)$ và giá trị biên chưa biết $P(t)$ thỏa mãn bài toán Cauchy cho phương trình vi phân thường như sau

$$\begin{cases} P^{//}(t) + \omega^2 P(t) = hu_{tt}(0,t),\ 0 < t < T, \\ P(0) = P_0,\ P^{/}(t) = P_1, \end{cases} \quad (6)$$

với $\omega > 0, h \ge 0,$ P_0 và P_1 là các hằng số cho trước.

Trong [1] đã nghiên cứu một trường hợp đặc biệt của bài toán (1)-(6) với $u_0 = u_1 = P_0 = 0$ và $\alpha = \beta = 2,$ trong đó điều kiện biên (3) được thay bởi

$$u(1,t) = 0, \quad (7)$$

Trong trường hợp nầy bài toán (1), (2), (4)--(7) là mô hình toán học mô tả sự va chạm của một vật rắn và một thanh đàn nhớt tuyến tính tựa trên một nền cứng [1].

Chú ý rằng từ (6) ta biểu diễn $P(t)$ theo $P_0, P_1, \omega, h, u_{tt}(0,t)$ và sau đó tích phân từng phần, ta thu được

$$P(t) = g(t) + hu(0,t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds, \quad (8)$$

trong đó

$$\begin{cases} g(t) = (P_0 - h_0\tilde{u}_0(0))\cos\omega t + (P_1 - h_0\tilde{u}_1(0))\dfrac{\sin\omega t}{\omega}, \\ k(t) = h\omega\sin\omega t. \end{cases} \quad (9)$$

Bằng cách khử bớt một ẩn hàm $P(t)$ thì điều kiện biên (2) có dạng

$$u_x(0,t) = g(t) + hu(0,t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds. \quad (10)$$

Vậy ta đưa bài toán (1)-(6) về bài toán (1)-(5), (8) hoặc (1), (3)-(5), (10) với các hàm $g(t), k(t)$ cho trước như (9).

Trong [2], Bergounioux, Long, Định đã xét bài toán (1)-(5), (8) với $\alpha = \beta = 2.$ Trong trường hợp nầy, bài toán mô tả sự va chạm của một vật rắn và một thanh đàn nhớt tựa trên một nền đàn hồi nhớt với ràng buộc đàn hồi tuyến tính tại bề mặt, các ràng buộc liên kết với một lực cản ma sát nhớt.

Trong bài nầy chúng tôi muốn đề cập là bài toán (1)-(6) với $\alpha \geq 2,\ \beta \geq 0$ là các hằng số cho trước. Trong trường hợp nầy bài toán (1)-(6) là mô hình toán học mô tả sự va chạm của một vật rắn và một thanh đàn hồi nhớt phi tuyến tựa trên một nền đàn hồi nhớt [8]. Chúng tôi cũng thu được sự tồn tại nghiệm toàn cục của bài toán. Kết quả nầy đã mở rộng kết quả trong [2] với trường hợp $\alpha = \beta = 2.$ Mặt khác, nếu $\alpha = \beta = 2,$ chúng tôi cũng thu được một số kết quả về tính đều của nghiệm tùy thuộc vào tính đều của dữ kiện. Phần cuối của bài nầy chúng tôi chứng minh nghiệm (u, P) của bài toán (1)-(5), (8) với $\alpha = \beta = 2,$ có được một khai triển tiệm cận cấp $N+1$ theo theo hai tham số K, λ. Kết quả thu được ở đây cũng đã mở rộng và chứa đựng các kết quả trong [1-3, 5-7] như là trường hợp riêng. Do khuôn khổ hạn định của bài báo cáo sẽ in trong Kỷ yếu Hội nghị, nên chúng tôi chỉ trình bày bài toán và phát biểu kết quả. Chí tiết chứng minh sẽ được công bố trong [8].

2. SỰ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM

Ta bỏ qua một số định nghĩa các không gian quen thuộc như $C^m[0,1],\ L^p(0,1),$ $W^{m,p}(0,1),\ L^p(0,T;X),\ 1 \leq p \leq \infty,$ và sử dụng các ký hiệu sau $W^{m,p} = W^{m,p}(0,1),$ $L^p = W^{0,p}(0,1),\ \ H^m = W^{m,2}(0,1),\ 1 \leq p \leq \infty,\ m = 0,1,2,..$ Chuẩn và tích vô hướng trên L^2 lần lượt được ký hiệu bởi $\|\cdot\|$ và $\langle \cdot,\cdot \rangle.$ Ký hiệu $\|\cdot\|_X$ dùng để chỉ chuẩn trên không gian Banach $X.$ Gọi X' là đối ngẫu của $X.$ Ta cũng dùng ký hiệu $\langle \cdot,\cdot \rangle$ để chỉ cặp tích đối ngẫu giữa X' và $X.$ Ta cũng sử dụng các ký hiệu $u(t),$ $\dot{u}(t) = u'(t) = u_t(t),$ $\ddot{u}(t) = u''(t) = u_{tt}(t),\ u_x(t) = \nabla u(t),\ u_{xx}(t) = \Delta u(t),$ lần lượt thay cho $u(x,t),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t),$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t),\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t),\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$

Ta thành lập các giả thiết sau

(H_1) $\lambda > 0, K \geq 0, h \geq 0, \lambda_1 > 0$ và $K_1 + h > 0,$

(H_2) $u_0 \in H^2$ và $u_1 \in H^1,$

(H_3) $f, f_t \in L^2((0,1)\times(0,T)),$

(H_4) $k \in H^1(0,T) \cap W^{2,1}(0,T),$

(H_5) $g \in H^2(0,T).$

Khi đó ta có định lý sau

Định lý 1.[8] *Với các giả thiết* $(H_1) - (H_5),$ *tồn tại duy nhất nghiệm yếu* (u, P) *của bài toán* (1.1) – (1.5), (1.8) *sao cho*

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0,T;H^2),\ u_t \in L^\infty(0,T;H^1),\ u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2), \\ u(0,t) \in W^{1,\infty}(0,T), \\ u(1,t) \in H^2(0,T) \cap W^{1,\infty}(0,T), \\ P \in W^{1,\infty}(0,T). \end{cases} \tag{11}$$

Chú ý 1. Từ (11) dẫn đến

$u \in C^0(0,T;H^1) \cap C^1(0,T;L^2) \cap L^\infty(0,T;H^2)$. (12)

3. SỰ PHỤ THUỘC TÍNH TRƠN CỦA NGHIỆM VÀO CÁC DỮ KIỆN

Trong phần này chúng tôi nghiên cứu tính trơn của nghiệm bài toán (1) – (5), (8) trong trường hợp $\alpha = \beta = 2$. Từ đây, chúng ta giả sử $(h, K, K_1, \lambda, \lambda_1)$ thỏa mãn các giả thiết (H_1). Ta tăng cường thêm các giả thiết cho u_0, u_1, f, g, k như sau:

$(H_1)^{(r)}$ $\quad u_0 \in H^{r+2}$ và $u_1 \in H^{r+1}$,

$$(H_2)^{(r)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^\nu f}{\partial t^\nu} \in L^2(Q_T), \ 0 \le \nu \le r+1, \\ \dfrac{\partial^\mu f}{\partial t^\mu}(x,0) \in H^1, \ 0 \le \mu \le r-1, \end{cases}$$

$(H_3)^{(r)}$ $\quad g \in H^{r+2}(0,T)$,

$(H_4)^{(r)}$ $\quad k \in H^{r+1}(0,T)$.

Khi đó ta có định lý sau

Định lý 2.[8] *Với* $\alpha = \beta = 2$ *và các giả thiết* $(H_1), (H_1)^{(r)} - (H_4)^{(r)}$ *đúng. Khi đó tồn tại duy nhất nghiệm yếu* (u, P) *của bài toán* (1) – (5), (8) *thỏa mãn*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^r u}{\partial t^r} \in L^\infty(0,T;H^2), \dfrac{\partial^{r+1} u}{\partial t^{r+1}} \in L^\infty(0,T;H^1), \dfrac{\partial^{r+2} u}{\partial t^{r+2}} \in L^\infty(0,T;L^2), \\ u \in C^{r-1}(0,T;H^2) \cap C^r(0,T;H^1) \cap C^{r+1}(0,T;L^2), \\ u(0,t) \in W^{r+1,\infty}(0,T), \\ u(1,t) \in H^{r+2}(0,T) \cap W^{r+1,\infty}(0,T), \\ P \in W^{r+1,\infty}(0,T). \end{cases} \tag{13}$$

4. KHAI TRIỂN TIỆM CẬN CỦA NGHIỆM THEO HAI THAM SỐ

Trong phần này chúng tôi giả sử $\alpha = \beta = 2$ và $(h, K_1, \lambda_1, f, g, k)$ thỏa mãn các giả thiết $(H_1) - (H_5)$. Với các tham số $K \ge 0, \lambda \ge 0$, chúng tôi xét bài toán nhiễu $(\widetilde{Q}_{K,\lambda})$ sau

$$(\widetilde{Q}_{K,\lambda}) \begin{cases} Lu \equiv u_{xx} - u_{tt} = -Ku - \lambda u_t + f(x,t), \ 0 < x < 1, \ 0 < t < T, \\ B_0 u \equiv u_x(0,t) = P(t), \\ Bu \equiv u_x(1,t) + K_1 u(1,t) + \lambda_1 u_t(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \\ P(t) = g(t) + hu(0,t) - \displaystyle\int_0^t k(t-s)u(0,s)ds. \end{cases}$$

Giả sử $(u_{0,0}, P_{0,0})$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán $(\widetilde{Q}_{0,0})$ tương ứng với $(K,\lambda)=(0,0)$. Gọi $(u_{\gamma_1,\gamma_2}, P_{\gamma_1,\gamma_2})$ với $(\gamma_1,\gamma_2)\in Z_+^2,\ 2\le \gamma_1+\gamma_2\le N$ là nghiệm yếu của bài toán $(\widetilde{Q}_{\gamma_1,\gamma_2})$

$$
\begin{cases}
Lu_{\gamma_1,\gamma_2} = \widetilde{H}_{\gamma_1,\gamma_2}, \qquad 0<x<1,\ 0<t<T,\\
B_0 u_{\gamma_1,\gamma_2} = P_{\gamma_1,\gamma_2}(t),\ Bu_{\gamma_1,\gamma_2}=0,\\
u_{\gamma_1,\gamma_2}(x,0) = u'_{\gamma_1,\gamma_2}(x,0)=0,\\
P_{\gamma_1,\gamma_2}(t) = hu_{\gamma_1,\gamma_2}(0,t) - \int_0^t k(t-s)u_{\gamma_1,\gamma_2}(0,s)ds.\\
u_{\gamma_1,\gamma_2} \in C^0(0,T;H^1)\cap C^1(0,T;L^2)\cap L^\infty(0,T;H^2),\\
u'_{\gamma_1,\gamma_2} \in L^\infty(0,T;H^1),\ \ u''_{\gamma_1,\gamma_2}\in L^\infty(0,T;L^2),\\
u_{\gamma_1,\gamma_2}(0,t)\in W^{1,\infty}(0,T),\ u_{\gamma_1,\gamma_2}(1,t)\in H^2(0,T)\cap W^{1,\infty}(0,T),\\
P_{\gamma_1,\gamma_2}\in W^{1,\infty}(0,T),
\end{cases}
$$

ở đây

$$
\begin{cases}
\widetilde{H}_{1,0} = -u_{0,0},\ \widetilde{H}_{0,1} = -u'_{0,0},\\
\widetilde{H}_{\gamma_1,\gamma_2} = -u_{\gamma_1-1,\gamma_2} - u'_{\gamma_1,\gamma_2-1},\ (\gamma_1,\gamma_2)\in Z_+^2,\ \ 2\le\gamma_1+\gamma_2\le N.
\end{cases}
$$

Gọi $(u,P)=(u_{\lambda,K},P_{\lambda,K})$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán $(\widetilde{Q}_{K,\lambda})$, khi đó cặp hàm số (v,R) định nghĩa bởi

$$
\begin{cases}
v = u_{K,\lambda} - \sum_{0\le\gamma_1+\gamma_2\le N} u_{\gamma_1,\gamma_2} K^{\gamma_1}\lambda^{\gamma_2},\\
R = P_{K,\lambda} - \sum_{0\le\gamma_1+\gamma_2\le N} P_{\gamma_1,\gamma_2} K^{\gamma_1}\lambda^{\gamma_2},
\end{cases}
$$

sẽ thỏa mãn bài toán

$$\begin{cases} Lv = -Kv - \lambda v_t + e_{N,K,\lambda}(x,t), \ 0 < x < 1, \ 0 < t < T, \\ B_0 v = R(t), \ Bv = 0, \\ v(x,0) = v_t(x,0) = 0, \\ R(t) = hv(0,t) - \int_0^t k(t-s)v(0,s)ds. \\ v \in C^0(0,T;H^1) \cap C^1(0,T;L^2) \cap L^\infty(0,T;H^2), \\ v' \in L^\infty(0,T;H^1), \ \ v'' \in L^\infty(0,T;L^2), \\ v(0,t) \in W^{1,\infty}(0,T), \ v(1,t) \in H^2(0,T) \cap W^{1,\infty}(0,T), \\ R \in W^{1,\infty}(0,T), \end{cases} \tag{14}$$

trong đó

$$e_{N,K,\lambda} = \sum_{\gamma_1+\gamma_2=N+1} (u_{\gamma_1-1,\gamma_2} + u'_{\gamma_1,\gamma_2-1}) K^{\gamma_1} \lambda^{\gamma_2}. \tag{15}$$

Ta có bổ đề sau đây

Bổ đề 3.[8] *Ta có đánh giá sau*

$$\left\| e_{N,K,\lambda} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le \widetilde{C}_N (\sqrt{K^2 + \lambda^2})^{N+1}, \tag{16}$$

ở đây $\widetilde{C}_N$ *là hằng số chỉ phụ thuộc vào các hằng số* $\left\| u_{\gamma_1-1,\gamma_2} \right\|_{L^\infty(0,T;H^1)}$, $\left\| u'_{\gamma_1,\gamma_2-1} \right\|_{L^\infty(0,T;H^1)}$, $(\gamma_1,\gamma_2) \in Z_+^2, \gamma_1+\gamma_2 = N+1.$

Định lý 4.[8] *Giả sử* $\alpha = \beta = 2$ *và các giả thiết* $(H_1)-(H_5)$ *được thỏa mãn.Khi đó với mỗi* $K \ge 0, \lambda \ge 0,$ *bài toán* $(\widetilde{Q}_{K,\lambda})$ *có duy nhất nghiệm yếu* $(u,P) = (u_{\lambda,K}, P_{\lambda,K})$ *thỏa mãn đánh giá tiệm cận đến cấp* $N+1$ *như sau*

$$\begin{aligned} &\left\| u'_{K,\lambda} - \sum_{0 \le \gamma_1+\gamma_2 \le N} u'_{\gamma_1,\gamma_2} K^{\gamma_1} \lambda^{\gamma_2} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \left\| u_{K,\lambda} - \sum_{0 \le \gamma_1+\gamma_2 \le N} u_{\gamma_1,\gamma_2} K^{\gamma_1} \lambda^{\gamma_2} \right\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \\ &\quad + \left\| u'_{K,\lambda}(1,\cdot) - \sum_{0 \le \gamma_1+\gamma_2 \le N} u'_{\gamma_1,\gamma_2}(1,\cdot) K^{\gamma_1} \lambda^{\gamma_2} \right\|_{L^2(0,T)} \le \widetilde{C}^*_{N+1} \left(\sqrt{K^2+\lambda^2} \right)^{N+1}, \end{aligned} \tag{17}$$

và

$$\left\| P_{K,\lambda} - \sum_{0 \le \gamma_1+\gamma_2 \le N} P_{\gamma_1,\gamma_2} K^{\gamma_1} \lambda^{\gamma_2} \right\|_{C^0([0,T])} \le \widetilde{C}^{**}_{N+1} \left(\sqrt{K^2+\lambda^2} \right)^{N+1}, \tag{18}$$

với mọi $K \geq 0, \lambda \geq 0,$ *trong đó, các hàm* $\left(u_{\gamma_1,\gamma_2}, P_{\gamma_1,\gamma_2}\right)$ *là nghiệm yếu của các bài toán* $(\widetilde{Q}_{\gamma_1,\gamma_2}), (\gamma_1, \gamma_2) \in Z_+^2, \gamma_1 + \gamma_2 = N+1,$ *các hằng số* $\widetilde{C}_{N+1}^{*}, \widetilde{C}_{N+1}^{**}$ *độc lập với* K, λ .

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Thúc An, Nguyễn Đình Triều, *Shock between absolutely solid body and elastic bar with the elastic viscous frictional resistance at the side*, J. Mech. NCSR. Vietnam Tom **XIII** (2) (1991), 1-7.

2. Maitine Bergounioux, Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, *Mathematical model for a shock problem involving a linear viscoelastic bar*, Nonlinear Anal. **43** (2001), 547-651.

3. Alain Phạm Ngọc Định, Nguyễn Thành Long, *Linear approximation and asymptotic expansion associated to the nonlinear wave equation in one dimension*, Demonstratio Math. **19** (1986), 45-63.

4. J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires*, Dunod-Gauthier-Villars, Paris.1969.

5. Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, *On the quasilinear wave equation:* $u_{tt} - \Delta u + f(u, u_t) = 0$ *associated with a mixed nonhomogeneous condition*, Nonlinear Anal. **19** (1992), 613-623.

6. Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, *A semilinear wave equation associated with a linear differential equation with Cauchy data*, Nonlinear Anal. **24** (1995), 1261-1279.

7. Nguyễn Thành Long, Trần Ngọc Diễm, *On the nonlinear wave equation* $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u, u_x, u_t)$ *associated with the mixed homogeneous conditions*, Nonlinear Anal. **29** (1997), 1217-1230.

8. Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, Trần Ngọc Diễm, *On a shock problem involving a nonlinear viscoelastic bar*, J. Boundary Value Problems, Hindawi Publishing Corporation (2005) (to appear).