BÀI TOÁN HỖN HỢP CHO PHƯƠNG TRÌNH SÓNG PHI TUYẾN CHỨA TOÁN TỬ KIRCHHOFF
MIXED PROBLEM FOR A NONLINEAR WAVE EQUATION INVOLVING KIRCHHOFF'S OPERATOR

Lê Thị Phương Ngọc*, Nguyễn Thành Long**

* Khoa Tự nhiên, Trường Cao đẳng Sư phạm Nha Trang, Việt nam
** Khoa Toán-Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. Hồ Chí Minh, Việt nam

---

BẢN TÓM TẮT

Trong báo cáo này chúng tôi xét bài toán giá trị biên-ban đầu cho phương trình sóng phi tuyến

$$(1)\qquad \begin{cases} u_{tt} - B\left(\| u_r \|_0^2\right)\left(u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r\right) = f(r,u),\ 0 < r < 1,\ 0 < t < T, \\ \left|\lim\limits_{r\to 0_+} \sqrt{r}\, u_r(r,t)\right| < +\infty, \quad u_r(1,t) + hu(1,t) = 0, \\ u(r,0) = \tilde{u}_0(r),\ u_t(r,0) = \tilde{u}_1(r),\ \| u_r \|_0^2 = \displaystyle\int_0^1 r\left| u_r(r,t)\right|^2 dr, \end{cases}$$

trong đó hằng số $h > 0$ và các hàm số $B, f, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ là cho trước. Trong Phần 1, chúng tôi liên kết bài toán (1) một dãy qui nạp tuyến tính mà sự tồn tại nghiệm địa phương được chứng minh bằng phương pháp Galerkin và lý luận về tính compact thông dụng trong các không gian Sobolev có trọng thích hợp. Trong Phần 2, nếu $f \in C^2([0,1]\times IR)$ và $B \in C^1(IR_+)$, $b_0 \le B(\eta) \le \bar{c}_0\eta^\alpha + \tilde{c}_0$, $\left|B'(\eta)\right| \le \bar{c}_1\eta^{\alpha-1} + \tilde{c}_1$, trong đó $b_0 > 0$, $\alpha > 1$, $\bar{c}_0, \tilde{c}_0, \bar{c}_1, \tilde{c}_1 \ge 0$ là các hằng số, chúng tôi thu được một thuật giải lặp cấp hai hội tụ. Cuối cùng trong Phần 3, với giả thiết $B \in C^{N+1}(IR_+)$, $B_1 \in C^N(IR_+)$, $B \ge b_0 > 0$, $B_1 \ge 0$, $f \in C^{N+1}([0,1]\times IR)$ và $f_1 \in C^N([0,1]\times IR)$, chúng tôi thu được một khai triển tiệm cận theo tham số bé ε đến cấp $N+1$ của nghiệm yếu $u_\varepsilon(r,t)$ của bài toán (1) mà trong đó phương trình $(1)_1$ được thay bởi phương trình $u_{tt} - \left[B\left(\| u_r \|_0^2\right) + \varepsilon B_1\left(\| u_r \|_0^2\right)\right]\left(u_{rr} + (1/r)u_r\right) = f(r,u) + \varepsilon f_1(r,u)$.

ABSTRACT

In this report we consider the initial-boundary value problem for the nonlinear wave equation

$$
(1)\qquad \begin{cases} u_{tt} - B\left(\| u_r \|_0^2\right)\left(u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r\right) = f(r,u),\ 0 < r < 1,\ 0 < t < T, \\ \left| \lim\limits_{r\to 0_+} \sqrt{r}\, u_r(r,t) \right| < +\infty, \quad u_r(1,t) + hu(1,t) = 0, \\ u(r,0) = \tilde{u}_0(r),\ u_t(r,0) = \tilde{u}_1(r),\ \| u_r \|_0^2 = \displaystyle\int_0^1 r\left| u_r(r,t)\right|^2 dr, \end{cases}
$$

where $B, f, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ are given functions and $h > 0$ is a given constant. In Part 1, we associate with this problem a linear recursive scheme for which the existence of a local and unique weak solution in Sobolev spaces with appropriate weight is proved by using a standard compactness argument. In Part 2, we give a sufficient condition for quadratic convergence of the scheme corresponding to the solution of the original problem with $f \in C^2([0,1]\times IR)$ and coefficient function $B \in C^1(IR_+)$, $b_0 \le B(\eta) \le \bar{c}_0\eta^\alpha + \tilde{c}_0$, $\left|B'(\eta)\right| \le \bar{c}_1\eta^{\alpha-1} + \tilde{c}_1$, with $b_0 > 0$, $\alpha > 1$, $\bar{c}_0, \tilde{c}_0, \bar{c}_1, \tilde{c}_1 \ge 0$ are given constants. Finally, in Part 3, if $B \in C^{N+1}(IR_+)$, $B_1 \in C^N(IR_+)$, $B \ge b_0 > 0$, $B_1 \ge 0$, $f \in C^{N+1}([0,1]\times IR)$ and $f_1 \in C^N([0,1]\times IR)$, we obtain from the following equation $u_{tt} - \left[B\left(\| u_r \|_0^2\right) + \varepsilon B_1\left(\| u_r \|_0^2\right)\right]\left(u_{rr} + (1/r)u_r\right) = f(r,u) + \varepsilon f_1(r,u)$ associated to $(1)_{2\text{-}3}$ a weak solution $u_\varepsilon(r,t)$ having an asymptotic expansion of order $N+1$ in ε, for ε sufficiently small.

1. GIỚI THIỆU

Trong báo cáo này chúng tôi xét bài toán giá trị biên-ban đầu cho phương trình sóng phi tuyến

$$
(1)\qquad \begin{cases} u_{tt} - B\left(\| u_r \|_0^2\right)\left(u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r\right) = f(r,u),\ 0 < r < 1,\ 0 < t < T, \\ \left| \lim\limits_{r\to 0_+} \sqrt{r}\, u_r(r,t) \right| < +\infty, \quad u_r(1,t) + hu(1,t) = 0, \\ u(r,0) = \tilde{u}_0(r),\ u_t(r,0) = \tilde{u}_1(r),\ \| u_r \|_0^2 = \displaystyle\int_0^1 r\left| u_r(r,t)\right|^2 dr, \end{cases}
$$

trong đó hằng số $h > 0$ và các hàm số $B, f, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ là cho trước. Liên quan đến bài toán (1) là bài toán sau đây, mà nhiều tác giả (chẳng hạn các tác giả trong các bài báo [6, 7, 13, 15, 16]) đã nghiên cứu

$$
(2)\quad \begin{cases} v_{tt} - B_1\left(\|\nabla v\|^2\right)\Delta v = f_1(x,u), & (x,t)\in\Omega_1\times(0,T), \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} + hv = 0, & (x,t)\in\partial\Omega_1\times(0,T), \\ hay\ \ v = 0, & (x,t)\in\partial\Omega_1\times(0,T), \\ v(x,0) = \tilde{v}_0(x),\ v_t(x,0) = \tilde{v}_1(x), & x\in\Omega_1, \end{cases}
$$

ở đây $\|\nabla v\|^2 = \int_{\Omega_1} |\nabla(x,t)|^2 dx = \int_{\Omega_1} \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x,t)\right|^2 dx,$ Ω_1 là một miền bị chặn trong IR^N với biên $\partial\Omega_1$ đủ trơn và ν là véctơ pháp tuyến đơn vị trên biên $\partial\Omega_1$, hướng ra phía ngoài.

Với $N=1$ và $\Omega_1 = (0,L),$ phương trình $(2)_1$ xuất phát từ bài toán mô tả dao động phi tuyến của một dây đàn hồi (xem Kirchhoff [7])

$$
\rho h v_{tt} - \left(P_0 + \frac{Eh}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial v}{\partial y}(y,t)\right|^2 dy\right) v_{xx} = 0, 0 < x < L, 0 < t < T,
$$

ở đây v là độ võng, x là biến không gian, t là biến thời gian, ρ là khối lượng riêng, h là thiết diện, L là chiều dài sợi dây ở lúc ban đầu, E là môđun Young và P_0 là lực căng lúc ban đầu.

Trong [3], Carrier cũng đã thiết lập một bài toán có dạng

$$
v_{tt} - \left(P_0 + P_1\int_0^L v^2(y,t)dy\right) v_{xx} = 0,
$$

trong đó P_0 và P_1 là các hằng số.

Trường hợp Ω_1 là quả cầu đơn vị mở trong IR^N và các hàm $v, f, \tilde{v}_0, \tilde{v}_1$ phụ thuộc vào x thông qua r với $r^2 = |x|^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2$, như sau

$$
v(x,t) = u(|x|,t),\ f_1(x,t) = f(|x|,t),\ \tilde{v}_0(x) = \tilde{u}_0(|x|),\ \tilde{v}_1(x) = \tilde{u}_1(|x|),
$$

thì

$$
-B_1(\|\nabla v\|^2)\Delta v = -B\left(\int_0^1 |u_r(r,t)|^2 r^\gamma dr\right)\left(u_{rr} + \frac{\gamma}{r}u_r\right),\ \gamma = N-1,
$$

ở đây $B(\eta) = B_1(\omega_N \eta)$ và ω_N diện tích mặt cầu đơn vị trong IR^N. Khi đó (2) viết lại như sau

$$
(3)\quad \begin{cases} u_{tt} - B\left(\int_0^1 |u_r(r,t)|^2 r^\gamma dr\right)(u_{rr} + \frac{\gamma}{r}u_r) = f(r,u),\ 0<r<1,\ 0<t<T, \\ u_r(1,t) + hu(1,t) = 0, \quad 0<t<T, \\ hay \qquad u(1,t) = 0, \quad 0<t<T, \\ u(r,0) = \tilde{u}_0(r), \quad u_t(r,0) = \tilde{u}_1(r), \quad 0<r<1. \end{cases}
$$

Với $N = 2$, $(3)_1$ là phương trình sóng phi tuyến hai chiều mô tả dao động của màng đơn vị $\Omega_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Trong quá trình dao động, bề mặt của màng Ω_1 và sức căng tại các điểm khác nhau trên đó thay đổi theo thời gian. Điều kiện trên biên mô tả những ràng buộc đàn hồi, trong đó h là hằng số có một ý nghĩa cơ học. Điều kiện biên $(1)_2$ hiển nhiên sẽ được thoả mãn nếu u là một nghiệm cổ điển của bài toán (1), (chẳng hạn như $u \in C^1(\overline{\Omega} \times (0,T)) \cap C^2(\Omega \times (0,T))$). Điều kiện này thường được sử dụng trong sự liên hệ với các không gian Sobolev có trọng r (xem [2, 14]).

Trường hợp phương trình $(3)_1$ không chứa số hạng $(\gamma / r)u_r$ $(\gamma = 0)$, thì $(3)_1$ có dạng

$$
(4)\quad u_{tt} - B\left(\int_0^1 |u_r(r,t)|^2 r^\gamma dr\right) u_{rr} = f(r,u).
$$

Khi $f = 0$, bài toán Cauchy hay bài toán hỗn hợp (4) đã được nhiều tác giả nghiên cứu; xem [5, 20] và các tài liệu tham khảo được nêu trong đó. Tổng quan các kết quả thuộc về lĩnh vực Toán học của mô hình Kirchhoff có thể được tìm thấy trong các tài liệu [18, 19]. Mederios ([17]) cũng đã nghiên cứu bài toán (1) trên một tập mở và bị chặn Ω của IR^3, với $f = f(u) = -bu^2$, $b > 0$ là hằng số cho trước. Hosoya và Yamada ([6]) đã nghiên cứu bài toán (4)-$(3)_{3,4}$ với $f = f(u) = -\delta |u|^\alpha u$, trong đó $\delta > 0$, $\alpha \geq 0$ là các hằng số cho trước. Trong [11], các tác giả cũng đã nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình

$$
(5)\qquad u_{tt} + \lambda \Delta^2 u - B\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u + \varepsilon |u_t|^{\alpha - 1} u_t = F(x,t),\ x \in \Omega,\ t > 0,
$$

ở đây $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$, $0 < \alpha < 1$, Ω là một tập mở và bị chặn của IR^3.

Trường hợp có số hạng $(1/r)u_r$ xuất hiện trong phương trình $(1)_1$ ta phải khử bỏ hệ số $1/r$ bằng cách sử dụng các không gian Sobolev có trọng thích hợp (xem [2, 8, 14]).

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu bài toán (1) tương ứng với một số dạng của hàm f ở vế phải. Trước hết, chúng tôi liên kết bài toán (1) với việc xây dựng một dãy lặp tuyến tính bị chặn trong một không gian hàm thích hợp. Sự tồn tại nghiệm địa phương được chứng minh dựa vào các phương pháp compact thông thường. Chúng tôi xin được chú ý rằng phương pháp tuyến tính sử dụng ở trong bài báo này và trong các bài [2, 4, 12, 15, 16, 21] không áp dụng được cho các bài toán ở các bài báo [5, 9, 10, 11, 13, 14, 17]. Trong phần 2, chúng tôi xét bài toán (1) với

$f \in C^2([0,1]\times IR)$ và $B \in C^1(IR_+)$, $b_0 \le B(\eta) \le \bar{c}_0\eta^\alpha + \tilde{c}_0$, $\left|B^/(\eta)\right| \le \bar{c}_1\eta^{\alpha-1} + \tilde{c}_1$, trong đó $b_0 > 0$, $\alpha > 1$, và $\bar{c}_0, \tilde{c}_0, \bar{c}_1, \tilde{c}_1 \ge 0$ là các hằng số cho trước. Ở đây, một dãy quy nạp tuyến tính $\{u_m\}$ được xây dựng như sau

(6) $$\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} - B\left(\|\nabla u_m\|_0^2\right)\left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial r^2} + (1/r)\frac{\partial u_m}{\partial r}\right) = f(r,u_{m-1}) + (u_m - u_{m-1})\frac{\partial f}{\partial u}(r,u_{m-1}),$$

$0 < r < 1$, $0 < t < T$, với u_m thoả $(1)_{2,3}$ và số hạng đầu tiên của dãy được chọn là $u_0 = 0$. Từ đó, nếu các điều kiện đưa ra được thoả mãn, thì ta sẽ có sự hội tụ bậc hai của dãy $\{u_m\}$ về nghiệm yếu của bài toán (1). Cuối cùng trong phần 3, với $B \in C^{N+1}(IR_+)$, $B_1 \in C^N(IR_+)$, $B \ge b_0 > 0$, $B_1 \ge 0$, $f \in C^{N+1}([0,1]\times IR)$ và $f_1 \in C^N([0,1]\times IR)$, chúng tôi thu được một khai triển tiệm cận theo $\varepsilon > 0$ (đủ nhỏ) đến cấp $N+1$ của nghiệm yếu $u_\varepsilon(r,t)$ của bài toán (1), mà trong đó $f(r,u)$ được thay bởi $f(r,u) + \varepsilon f_1(r,u)$, B được thay bởi $B + \varepsilon B_1$. Kết quả thu được tổng quát hơn các kết quả trong [4, 12, 15, 16].

2. CÁC KHÔNG GIAN HÀM VÀ KẾT QUẢ CHUẨN BỊ

Đặt $\Omega = (0,1)$. Ta bỏ qua định nghĩa các không gian hàm thông dụng $C^m(\overline{\Omega})$, $L^p(\Omega)$, $H^m(\Omega)$ và $W^{m,p}(\Omega)$. Với mỗi hàm $v \in C^0(\overline{\Omega})$, ta định nghĩa $\|v\|_0 = \left(\int_0^1 r\left|u_r(r,t)\right|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}$ và định nghĩa không gian V_0 là đầy đủ hoá của không gian $C^0(\overline{\Omega})$ đối với chuẩn $\|\cdot\|_0$.

Tương tự, với mỗi hàm $v \in C^1(\overline{\Omega})$, ta định nghĩa $\|v\|_1 = \left(\|v\|_0^2 + \|v^/\|_0^2\right)^{1/2}$ và định nghĩa không gian V_1 là đầy đủ hoá của không gian $C^1(\overline{\Omega})$ tương ứng với chuẩn $\|\cdot\|_1$. Ta chú ý rằng các chuẩn $\|.\|_0$ và $\|.\|_1$ có thể được định nghĩa một cách tương ứng từ các tích vô hướng tương ứng $\langle u,v\rangle = \int_0^1 ru(r)v(r)dr$ và $\langle u,v\rangle + \langle u^/,v^/\rangle$. Khi đó ta chứng minh dễ dàng rằng V_0 và V_1 là các không gian Hilbert với các tích vô hướng tương ứng như trên. Mặt khác, V_1 được nhúng liên tục và nằm trù mật trong V_0. Ta đồng nhất V_0 với $V_0^/$ (đối ngẫu của V_0), ta có $V_1 \square V_0 \equiv V_0^/ \square V_1^/$. Mặt khác, ký hiệu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ cũng được dùng để chỉ cặp đối ngẫu giữa V_1 và $V_1^/$. Bây giờ, với mỗi $h > 0$, ta đặt

(7) $$a(u,v) = hu(1)v(1) + \int_0^1 ru^/(r)v^/(r)dr,\ u,v \in V_1.$$

Khi đó, $a(\cdot,\cdot)$ là dạng song tuyến tính, đối xứng xác định bởi (7) là liên tục trên $V_1 \times V_1$ và cưỡng bức trên V_1, (xem [2]). Nhờ định lý Lax-Milgram, tồn tại duy nhất một toán tử tuyến tính liên tục $A: V_1 \to V_1^/$ sao cho $a(u,v) = \langle Au,v\rangle$ $\forall u,v \in V_1$. Hơn nữa $Au \equiv \frac{-1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{du}{dr})$ trong $V_1^/$. Với mỗi $v \in C^2([0,1])$ ta đặt

(8) $$\|v\|_2 = \left(\int_0^1 r[|v(r)|^2 + |v^{/}(r)|^2 + |Av(r)|^2]dr \right)^{1/2},$$

và định nghĩa V_2 là đầy đủ hoá của không gian $C^2([0,1])$ đối với chuẩn $\|.\|_2$. Cũng chú ý rằng V_2 cũng là không gian Hilbert đối với tích vô hướng

(9) $$\langle u,v\rangle + \langle u^{/}, v^{/}\rangle + \langle Au, Av\rangle.$$

Mặt khác ta cũng có thể định nghĩa V_2 như là $V_2 = \{v \in V_1 : Av \in V_0\}$.

Liên quan giữa các không gian V_0, V_1 và V_2 ta có các kết quả sau đây mà chứng minh của chúng có thể tìm thấy trong [2].

Bổ đề. ([2]) *Các phép nhúng* $V_2 \square V_1 \square V_0$ *là compact*.

Với một không gian Banach X, ta sẽ ký hiệu chuẩn trên X là $\|.\|_X$ và $X^{/}$ là đối ngẫu của X.

Ký hiệu $L^p(0,T;X), 1 \le p \le \infty,$ là không gian Banach gồm tất cả các hàm đo được $u : (0,T) \to X,$ sao cho

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} < \infty, \quad \text{với } 1 \le p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \|u(t)\|_X, \quad \text{với } p = \infty.$$

Ta ký hiệu $u(t), \dot{u}(t) = u_t(t), \ddot{u}(t) = u_{tt}(t), u^{/}(t) = u_r(t), u^{//}(t) = u_{rr}(t)$ để chỉ $u(r,t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(r,t), \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(r,t), \frac{\partial u}{\partial r}(r,t), \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r,t),$ lần lượt.

3. DÃY QUY NẠP TUYẾN TÍNH.

Trong mục này chúng tôi sẽ xét bài toán giá trị đầu và giá trị biên (1) với các giả thiết sau

(H_1) $\tilde{u}_1 \in V_1, \ \tilde{u}_0 \in V_2,$

(H_2) $B \in C^1(IR_+), \ B(\eta) \ge b_0 > 0, \ \forall \eta \ge 0,$

(H_3) $f \in C^1([0,1] \times IR).$

Ứng với bất kỳ $M > 0$ và $T > 0,$ cho trước, với B và f thoả các giả thiết (H_2) và (H_3) tương ứng ta đặt

$$W(M,T) = \{v \in L^\infty(0,T;V_2) : \dot{v} \in L^\infty(0,T;V_1), \ddot{v} \in L^2(0,T;V_0),$$
$$\|v\|_{L^\infty(0,T;V_2)} \le M, \|\dot{v}\|_{L^\infty(0,T;V_1)} \le M, \|\ddot{v}\|_{L^2(0,T;V_0)} \le M\},$$

$$W_1(M,T) = \{v \in W(M,T) : \ddot{v} \in L^\infty(0,T;V_0)\}.$$

Trong phần này, với sự lựa chọn $M > 0$ và $T > 0$ thích hợp, ta sẽ xây dựng một dãy $\{u_m\}$ bằng phương pháp quy nạp. Dãy quy nạp này sẽ được chứng minh hội tụ về nghiệm yếu của bài toán (1).

Trước hết ta chọn $u_0 \equiv 0,$ giả sử

(10) $u_{m-1} \in W_1(M,T)$,

và liên kết bài toán (1.1) với bài toán biến phân: Tìm $u_m \in W_1(M,T)$ $(m \geq 1)$ sao cho

$$(11) \quad \begin{cases} \langle \ddot{u}_m(t), v\rangle + B\left(\| \nabla u_{m-1}(t) \|_0^2\right) a(u_m(t), v) = \langle f(r, u_{m-1}), v\rangle, \quad \forall v \in V_1, \\ u_m(0) = \tilde{u}_0, \quad \dot{u}_m(0) = \tilde{u}_1, \end{cases}$$

Sự tồn tại của dãy $\{u_m\}$ cho bởi định lý sau đây.

Định lý 1. *Giả sử* (H_1) - (H_3) *đúng. Khi đó tồn tại các hằng số* $M > 0$ *phụ thuộc vào* $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, B, h$ *và* $T > 0$ *phụ thuộc vào* $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, B, h, f$ *sao cho với* $u_0 \equiv 0$, *tồn tại một dãy quy nạp tuyến tính* $\{u_m\} \subset W_1(M,T)$ *xác định bởi* (10) – (11).

Chứng minh. Được thực hiện qua các bước xấp xỉ Galerkin, đánh giá tiên nghiệm, qua giới hạn nhờ vào lý luận về tính compact, ta thu được $u_m \in W_1(M,T)$ là nghiệm của bài toán (11).

Định lý 2. *Giả sử* (H_1) - (H_3) *đúng. Khi đó:*

(i) *Tồn tại* $M > 0, T > 0$ *sao cho bài toán* (1) *có duy nhất một nghiệm yếu* $u \in W_1(M,T)$.

(ii) *Mặt khác, dãy qui nạp tuyến tính* $\{u_m\}$ *xác định bởi* (10)-(11) *hội tụ mạnh về nghiệm yếu* u *của bài toán* (1) *trong không gian*

$$W_1(T) = \{v \in L^\infty(0,T;V_1) : \dot{v} \in L^\infty(0,T;V_0)\}.$$

Hơn nữa ta cũng có ước lượng sau

$$\| u_m - u \|_{L^\infty(0,T;V_1)} + \| \dot{u}_m - \dot{u} \|_{L^\infty(0,T;V_0)} \leq C_T k_T^m, \ \forall m \geq 1,$$

trong đó ở đây $0 \leq k_T < 1$, C_T *là các hằng số độc lập với* m.

Chứng minh. Chỉ cần chứng minh dãy qui nạp tuyến tính $\{u_m\}$ cho bởi định lý 1 hội tụ mạnh về u trong $W_1(T)$ và u là nghiệm yếu của bài toán (1) thỏa $u \in W_1(M,T)$. Sự duy nhất nghiệm cũng được chứng minh nhờ vào bổ đề Gronwall.

Chú ý 2. Trong trường hợp $B \equiv 1$, một vài kết quả đã nhận được trong [4]. Trong trường hợp phương trình (1) không chứa số hạng $(1/r)u_r$, $f \in C^1([0,1] \times IR)$, và $B \equiv 1$, một số các kết quả cũng đã thu được trong [12].

4. SỰ HỘI TỤ BẬC HAI

Trong mục này, chúng tôi xét bài toán (1) với giả thiết bổ sung sau đây

(H_4) $B \in C^1(IR_+)$, sao cho các hằng số $b_0 > 0$, $\alpha > 1$, và $\bar{c}_0, \tilde{c}_0, \bar{c}_1, \tilde{c}_1 \geq 0$ thỏa

$$b_0 \leq B(\eta) \leq \bar{c}_0 \eta^\alpha + \tilde{c}_0, \quad \left|B'(\eta)\right| \leq \bar{c}_1 \eta^{\alpha-1} + \tilde{c}_1, \ \forall \eta \geq 0,$$

(H_5) $f \in C^2([0,1] \times IR)$.

Với các hằng số $M > 0, T > 0$ ta sẽ chọn sau, ta xét dãy lặp dãy $\{u_m\}$ bởi quy tắc sau: Cho trước $u_0 \equiv 0$ và giả sử rằng

(12) $u_{m-1} \in W_1(M,T)$,

Ta liên kết bài toán (1) với bài toán biến phân: Tìm $u_m \in W_1(M,T)$ $(m \geq 1)$ sao cho

$$(13)\quad \begin{cases} \langle \ddot{u}_m(t), v\rangle + B\left(\|\nabla u_m(t)\|_0^2\right) a(u_m(t), v) = \langle f(r, u_{m-1}), v\rangle \\ \qquad\qquad + \langle (u_m - u_{m-1})\dfrac{\partial f}{\partial u}(r, u_{m-1}), v\rangle, \qquad \forall v \in V_1, \\ u_m(0) = \tilde{u}_0, \ \ \dot{u}_m(0) = \tilde{u}_1, \end{cases}$$

Kết quả sau cho ta sự hội tụ bậc hai của dãy $\{u_m\}$ về nghiệm yếu của bài toán (1).

Định lý 3. *Giả sử* $(H_1), (H_4), (H_5)$ *đúng. Khi đó tồn tại các hằng số* $M > 0,\ T > 0$ *sao cho*

(i) *Tồn tại một dãy quy nạp tuyến tính* $\{u_m\} \subset W_1(M, T)$ *xác định bởi* (12), (13).

(ii) *Bài toán* (1) *có duy nhất một nghiệm yếu* $u \in W_1(M, T)$.

(iii) *Dãy qui nạp* $\{u_m\}$ *xác định bởi* (12), (13) *hội tụ bậc hai về nghiệm yếu* u *của bài toán* (1) *trong không gian* $W_1(T)$ *theo nghĩa*

$$\|u_m - u\|_{W_1(T)} \le C\|u_{m-1} - u\|_{W_1(T)}^2,$$

với $C > 0$ *là hằng số độc lập với* m. *Hơn nữa ta cũng có ước lượng*

$$\|u_m - u\|_{W_1(T)} \le C_T \beta_T^{2^m} \quad \forall m,$$

ở đây $0 \le \beta_T < 1,\ C_T$ *là các hằng số độc lập với* m.

Chứng minh cũng được thực hiện tương tự định lý 1, 2, kết hợp với việc khai triển MacLaurin cho hàm f đến cấp hai. Tuy nhiên trong các bước chứng minh cần sử dụng đến nhiều kỹ thuật hơn, chẳng hạn trong đánh giá tiên nghiệm, cần sử dụng bất phương trình tích phân Volterra phi tuyến. Chi tiết chứng minh khá dài, chúng tôi xin được không trình bày ở đây.

Chú ý 3. Trong trường hợp đặc biệt $B \equiv 1$, kết quả nhận được trong [2] là hệ quả của định lý 3.

5. KHAI TRIỂN TIỆM CẬN CỦA NGHIỆM

Trong phần này, ta bổ sung thêm các giả thiết sau:

(H_6) $B \in C^{N+1}(IR_+),\ B_1 \in C^N(IR_+),\ B(\eta) \ge b_0 > 0,\ B_1(\eta) \ge 0,\ \forall \eta \ge 0,$

(H_7) $f \in C^{N+1}([0,1] \times IR),\ f_1 \in C^N([0,1] \times IR).$

Ta xét bài toán nhiễu sau, với ε là tham số đủ nhỏ, $|\varepsilon| \le 1$:

$$(P_\varepsilon)\quad \begin{cases} u_{tt} - B_\varepsilon\left(\|u_r\|_0^2\right)\left(u_{rr} + (1/r)u_r\right) = F_\varepsilon(r, u),\ 0 < r < 1,\ 0 < t < T, \\ \left|\lim\limits_{r \to 0_+} \sqrt{r}\, u_r(r, t)\right| < +\infty, \quad u_r(1, t) + hu(1, t) = 0, \\ u(r, 0) = \tilde{u}_0(r), \quad u_t(r, 0) = \tilde{u}_1(r), \\ B_\varepsilon\left(\|u_r\|_0^2\right) = B\left(\|u_r\|_0^2\right) + \varepsilon B_1\left(\|u_r\|_0^2\right),\ F_\varepsilon(r, u) = f(r, u) + \varepsilon f_1(r, u), \end{cases}$$

Trong phần tiếp theo nầy chúng tôi sẽ khai triển tiệm cận đến cấp $N+1$ theo ε của nghiệm yếu u_ε của bài toán (P_ε). Để cho gọn, ta cũng sử dụng thêm các ký hiệu

$$f[u] = f(r, u),\ B[u] = B\left(\|u_r\|_0^2\right),\ D_1 f = \partial f / \partial r,\ D_2 f = \partial f / \partial u,\ DB = B' = \frac{dB}{d\eta}.$$

Gọi $u_0 \in W_1(M,T)$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán (P_0) ứng với $\varepsilon = 0$. Giả sử $u_1,..., u_N \in W_1(M,T)$, với các hằng số $M > 0$ và $T > 0$ thích hợp, lần lượt là các nghiệm yếu duy nhất của các bài toán (Q_i), $i = 1,2,...,N$ dưới đây (được xác định như trong định lý 1):

$$(Q_1) \quad \begin{cases} \ddot{u}_1 + B[u_0]Au_1 = \widetilde{F}_1[u_1], \qquad 0 < r < 1,\ 0 < t < T, \\ \left| \lim\limits_{r \to 0_+} \sqrt{r}\, u_{1r}(r,t) \right| < +\infty, \quad u_{1r}(1,t) + hu_1(1,t) = 0, \\ u_1(r,0) = \dot{u}_1(r,0) = 0, \end{cases}$$

ở đây

$$(14) \qquad \widetilde{F}_1[u_1] = \pi_1[f] + \pi_0[f_1] - (\rho_1[B] + \rho_0[B_1])Au_0,$$

với $\pi_0[f_1],\ \pi_1[f],\ \rho_0[B],\ \rho_1[B]$ được định nghĩa như sau:

$$(15) \quad \begin{cases} \pi_0[f] = f[u_0] \equiv f(r,u_0),\ \pi_1[f] = \pi_0[D_2 f]u_1, \\ \rho_0[B] = B[u_0] \equiv B\left(\|u_{0r}\|_0^2\right),\ \rho_1[B] = 2\rho_0[B^{/}]\langle u_{0r}, u_{1r}\rangle. \end{cases}$$

Với $i = 2,...,N$, u_i là nghiệm của bài toán

$$(Q_i) \quad \begin{cases} \ddot{u}_i + B[u_0]Au_i = \widetilde{F}_i[u_i], \qquad 0 < r < 1,\ 0 < t < T, \\ \left| \lim\limits_{r \to 0_+} \sqrt{r}\, u_{ir}(r,t) \right| < +\infty, \quad u_{ir}(1,t) + hu_i(1,t) = 0, \\ u_i(r,0) = \dot{u}_i(r,0) = 0, \quad (i = 1,2,...,N), \end{cases}$$

ở đây

$$(16) \qquad \widetilde{F}_i[u_i] = \pi_i[f] + \pi_{i-1}[f_1] - \sum_{k=1}^{i} (\rho_k[B] + \rho_{k-1}[B_1])Au_{i-k},$$

với $\pi_i[f] = \pi_i[f, u_0, u_1, ..., u_i]$, $\rho_i[B, u_0, u_1, ..., u_i]$, được xác định theo công thức quy nạp sau

$$(17) \qquad \pi_i[f] = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{i-k}{i} \pi_k[D_2 f]u_{i-k},\ 2 \le i \le N,$$

$$(18) \qquad \rho_i[B] = \frac{2}{i} \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{j=0}^{i-k-1} (i-k-j)\rho_k[B^{/}]\langle u_{jr}, (u_{i-k-j})_r\rangle,\ 2 \le i \le N.$$

Khi đó ta có kết quả sau.

Định lý 4. *Giả sử $(H_1), (H_6), (H_7)$ đúng. Khi đó tồn tại các hằng số $M > 0$, $T > 0$ sao cho với mọi ε mà $|\varepsilon| \le 1$, bài toán (P_ε) có duy nhất một nghiệm yếu $u_\varepsilon \in W_1(M,T)$ thoả mãn một đánh giá tiệm cận đến cấp $N+1$ như sau*

$$(19) \qquad \left\| u_\varepsilon - \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i u_i \right\|_{L^\infty(0,T;V_1)} + \left\| \dot{u}_\varepsilon - \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \dot{u}_i \right\|_{L^\infty(0,T;V_0)} \le C_T |\varepsilon|^{N+1}.$$

với đó $u_0, u_1, ..., u_N$ lần lượt là các nghiệm yếu của các bài toán $(P_0), (Q_1), ..., (Q_N)$, tương ứng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] **R.A. Adams**, *Sobolev Spaces*, Academic Press, NewYork, 1975.

[2] **D.T.T. Binh, A.P.N. Dinh, N.T. Long**, *Linear recursive schemes associated with the nonlinear wave equation involving Bessel's operator*, Math. Comp. Modelling, **34** (2001), pp.541-556.

[3] **G.F. Carrier**, *On the nonlinear vibrations problem of elastic string*, Quart. J. Appl. Math. **3** (1945), pp.157-165.

[4] **A.P.N. Dinh, N.T. Long**, *Linear approximation and asymptotic expansion associated to the nonlinear wave equation in one dimension*, Demonstratio Math. **19** (1986), pp.45-63.

[5] **Y. Ebihara, L.A. Medeiros, M.M. Minranda**, *Local solutions for a nonlinear degenerate hyperbolic equation*, Nonlinear Anal. **10** (1986), pp.27-40.

[6] **M. Hosoya, Y. Yamada**, *On some nonlinear wave equation I: Local existence and regularity of solutions*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA, Math. **38** (1991), pp.225-238.

[7] **G.R. Kirchhoff**, *Vorlesungen ̃ber Mathematiche Physik*: Mechanik, Teuber, Leipzig,1876, Section **29.7**.

[8] **N.T. Long, A.P.N. Dinh**, *Periodic solutions of a nonlinear parabolic equation associated with the penetration of a magnetic field into a substance*, Comp. Math. Appl. **30** (1995), pp.63-78.

[9] **N.T. Long, A.P.N. Dinh**, *On the quasilinear wave equation*: $u_{tt} - \Delta u + f(u,u_t) = 0$ *associated with a mixed nonhomogeneous condition*, Nonlinear Anal. **19** (1992), pp.613-623.

[10] **N.T. Long, A.P.N. Dinh**, *A semilinear wave equation associated with a linear differential equation with Cauchy data*, Nonlinear Anal. **24** (1995), 1261-1279.

[11] **N.T. Long, et al.**, *On the nonlinear vibrations equation with a coefficient containing an integral*, Comp. Maths. Math. Phys. **33** (1993), pp.1171-1178.

[12] **N.T. Long, T.N. Diem**, *On the nonlinear wave equation* $u_{tt} - u_{xx} = f(x,t,u,u_x,u_t)$ *associated with the mixed homogeneous conditions*, Nonlinear Anal. **29** (1997), pp.1217-1230.

[13] **N.T. Long, T.M. Thuyet**, *On the existence, uniqueness of solution of the nonlinear vibrations equation*, Demonstratio Math. **32** (1999), pp.749-758.

[14] **N.T. Long, A.P.N. Dinh, D.T.T. Binh**, *Mixed problem for some semilinear wave equation involving Bessel's operator*, Demonstratio Math. **32** (1999), pp.77-94.

[15] **N.T. Long, A.P.N. Dinh, T.N. Diem**, *Linear recursive schemes and asymptotic expansion associated with the Kirchhoff-Carrier operator*, J. Math. Anal. Appl. **267** (2002), pp.116-134.

[16] **N.T. Long**, *On the nonlinear wave equation* $u_{tt} - B(t, \|u_x\|^2)u_{xx} = f(x,t,u,u_x,u_t)$ *associated with the mixed homogeneous conditions*, J. Math. Anal. Appl. **274** (2002), pp.102-123.

[17] **L.A. Medeiros**, *On some nonlinear perturbation of Kirchhoff-Carrier operator*, Comp. Appl. Math. 13 (1994), pp.225-233.

[18] **LA. Medeiros, J. Limaco, S.B. Menezes**, *Vibrations of elastic strings: Mathematical aspects, Part one*, J. Comput. Anal. Appl. **4**, No. 2 (2002), pp.91-127.

[19] **LA. Medeiros, J. Limaco, S.B. Menezes**, *Vibrations of elastic strings: Mathematical aspects, Part two*, J. Comput. Anal. Appl. **4**, No. 3 (2002), pp.211-263.

[20] **S.I. Pohozaev**, *On a class of quasilinear hyperbolic equation*, Math. USSR. Sb. **25** (1975), pp.145-158.

[21] **E.L. Ortiz, A.P.N. Dinh**, *Linear recursive schemes associated with some nonlinear partial differential equations in one dimension and the Tau method*, SIAM J. Math. Anal. **18** (1987), pp.452-464.