Ann. Fac. Sci. Saigon, **1961**, *7-18.*

Sur les suites de fonctions mesurables et l'extension du théorème de PEANO

par

M. A. PACQUEMENT

Etant donné l'équation différentielle $y' = f(x,y)$, PEANO a démontré que cette équation possédait une solution passant par un point donné, sous la seule condition de continuité de la fonction $f(x,y)$.

La présente note vise à étudier le cas où $f(x,y)$ est de 1[re] classe. Dans ce but, nous avons été amenés à rechercher certaines conditions de validité de passages à la limite dans les suites de fonctions composées et leurs intégrales.

Nous avons été également appelés à déterminer dans quels cas une suite de fonctions mesurables convergeait vers une fonction approximativement continue, critère qui à notre connaissance faisait défaut jusqu'ici.

Enfin nous étudierons certains types particuliers d'équations différentielles où $f(x,y)$ est de 1[re] classe et énoncerons un résultat partiel.

I. — *PROPRIETE DE CONVERGENCE DANS LES SUITES DE FONCTIONS COMPOSEES :*

Nous considérerons une suite convergente de fonctions numériques mesurables $\{ (g_n\, x) \}$, bornées dans leur ensemble $|g_n(x)| < M$, et définies dans un intervalle fermé I, $[a, b]$ de R ($a < b$). Soit $g(x)$ la limite de $g_n(x)$.

Nous considérerons en second lieu une autre suite convergente de fonctions de deux variables $f_n(x,y)$, définie dans $\triangle$, $x \in I$, $|y| \leqslant M$ convergeant vers $f(x,y)$. Nous supposerons que les f_n appartiennent à une des classes de BAIRE et qu'elles sont bornées dans leur ensemble dans le domaine, de définition, $|f_n(x,y)| < T$.

Nous porterons enfin notre attention sur une suite double

$$z_{m,n}(x) \qquad\qquad f_n[x,\ g_m(x)].$$

Nous rechercherons dans quel cas on pourra affirmer la convergence de cette suite quand m et n tendent simultanément vers l'infini.

Remarquons tout d'abord que les fonctions $z_{m,n}(x)$ sont des fonctions mesurables au sens de LEBESGUE. En effet si $\varphi(x,y)$ est une fonction continue, définie dans la même région que $f_n(x,y)$, il résulte d'un théorème de F. RIESZ (1), que si $g_m(x)$ est une fonction mesurable, il en est de même de $\varphi\,[x,g_m(x)]$. Toute fonction provenant de fonctions continues par des séries de passages à la limite, (toutes ces fonctions étant supposées bornées dans leur ensemble par T), est elle-même mesurable en vertu d'un théorème classique de LEBESGUE (2), f_n appartenant à une des classes de BAIRE, $z_{m,n}(x)$ est donc mesurable.

D'autre part on peut appliquer à la suite $g_m(x)$ le théorème d'EGOROFF, plus précisément, étant donné deux nombres positifs $\bar\eta$ et $\bar\varepsilon$ on peut trouver un entier $M_{\bar\eta,\bar\varepsilon}$ tel que l'on ait $|g_m(x) - g(x)| < \bar\varepsilon$ pour $m \geqslant M_{\bar\eta,\bar\varepsilon}$ sur un ensemble fermé $F_{\bar\varepsilon}$, tel que mes $[I - F_{\bar\varepsilon}] = |C\,F_{\bar\varepsilon}| < \bar\eta$. Posons $O_{\bar\varepsilon} = CF_{\bar\varepsilon}$, si nous donnons à $\bar\eta$ et à $\bar\varepsilon$ des valeurs décroissantes tendant vers 0, η_i et ε_i respectivement, formant deux séries convergentes de sommes η et ε, à chaque couple de valeurs η_i, ε_i correspondra un entier $M_i = M_{\eta_i,\varepsilon_i}$ que nous supposerons strictement croissant avec l'indice i.

Dans ces conditions on aura $|g_m(x) - g(x)| < \varepsilon$; pour $m \geqslant M_i$ en tout point de F_{ε_i}, donc à fortiori en tout point de $\bigcap_{j=1}^{\infty} F_{\varepsilon_j} \subset F_{\varepsilon_i}$. Prenons pour fixer les idées $\eta_i = \varepsilon_i = 1/2^i$, la mesure de $U_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} O_{\varepsilon_j}$ sera $\leqslant 1/2^{i-1}$ et sa mesure tend vers 0 avec i.

On a manifestement $U_i \supset U_{i+1}$, l'intersection de tous les U_i est donc de mesure nulle, nous l'appellerons Ω ou noyau d'EGOROFF pour la suite considérée.

Ainsi pour m assez grand, $m > M_{\eta_i,\varepsilon_i}$, *on a* $|g_m - g| < \varepsilon_i$ *si* $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} F_{\varepsilon_j}$ *ou* $x \notin U_i$, *ensemble dont la mesure tend vers 0 avec i.*

1°) *Cas d'existence d'une limite de* $z_{m,n}(x)$.

Soit $x_0 \notin \Omega$, alors il existe un indice i tel que $x_0 \in CU_i$ et alors $x \in CU_{i+p}$

Formons la différence $|f\,[x_0, g(x_0)] - f_n\,[x_0, g_m(x_0)]|$ on a

$$\left|f[x_0,g(x_0)]-f_n[x_0,g_m(x_0)]\right| \leqslant \left|f[x_0,g(x_0)] - f_n[x_0,g(x_0)]\right| + \left|f_n[x_0, g(x_0)] - f_n[x_0,g_m(x_0)]\right|$$

Soit λ_n la valeur du premier crochet. On a $\lim \lambda_n = 0$ quand $n \to \infty$ d'après l'hypothèse de la convergence de la suite f_n

Examinons le deuxième crochet. Posons $g(x_0) = y_0, g_m(x_0) = y$ et considérons l'expression $|f_n(x_0,y) - f_n(x_0,y_0)|$

Soit $\omega\,(x_0)$ l'oscillation de la suite $f_n\,(x_0,y)$ (3) au point y_0 ; λ étant un nombre positif donné on peut trouver d'après la définition de cette oscillation n assez grand, $n > N_{x_0}$, et $\bar\varepsilon$ assez petit, pour que les conditions.

$$|y - y_0| < \bar\varepsilon \qquad n > N_{x_0}$$

entraînent

$$|f_n(x_0, y) - f_n(x_0,y_0)| < \omega\,(x_0) + \lambda$$

Enfin comme on l'a vu, on peut trouver une autre valeur de N, N_{x_0,y_0}, telle que la condition $n > N_{x_0,y_0}$ entraîne

$$\left|f[x_0, g\,(x_0)] - f_n[x_0, g\,(x_0)]\right| < \lambda$$

Ainsi λ étant donné, on peut trouver au point x_0, $g(x_0)$, les trois nombres $\bar{\varepsilon}$, N_{x_0}, N_{x_0,y_0} correspondants.

On choisira $\varepsilon_i < \bar{\varepsilon}$, $n > \max(N_{x_0}, N_{x_0,y_0})$ $m > N_{\varepsilon_i}$ et on aura, en additionnant les deux inégalités précédentes :

$$|f[x_0,y(x_0)] - f_n[x_0,y_m(x_0)]| < \omega(x_0) + 2\lambda \text{ et enfin}$$
$$\lim |z_{m,n}(x_0) - f[x_0, g(x_0)]| \leqslant \omega(x_0)$$

quand m et n tendent vers l'infini. Ainsi on a le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — *Pour que la fonction composée $z_{m,n}(x) = f_n[x, g_m(x)]$ ait une limite pour $x = x_0$ quand m et n tendent vers l'infini, il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées :*

a) *x_0 n'appartient pas au noyau* d'EGOROFF *correspondant à la suite $g_m(x)$*

b) *l'oscillation de la suite $f_n(x_0,y)$ est nulle au point (x_0,y_0)*

Cas particulier. On peut notamment faire m = n, en prenant alors

$$n > \max(N_{x_0}, N_{x_0,y_0}, N_{\varepsilon_i})$$
$$\lim |z_{n,n}(x_0) - f[x_0, g(x_0)]| < \omega(x_0) + 2\lambda$$

donc $\lim |z_{n,n}(x_0) - f[x_0, g(x_0)]| \leqslant \omega(x_0)$

et l'on pourra écrire

$$|z_{n,n}(x) - f[x, g(x)]| \leqslant \omega(x) + \lambda_n(x) \qquad (1).$$

avec $\lim \omega(x) = 0$ quel que soit $x \in I$

2°) *Convergence d'intégrales de suites de fonctions composées.*

Notre but est de déterminer des cas où l'on est assuré que l'intégrale

$$\int_a^b f_n[x, g_n(x)]\,dx = \int_a^b z_{n,n}(x)\,dx$$

a une limite quand n tend vers l'infini.

Le théorème I et la formule (1) donnent un élément de réponse à ce problème. Intégrons l'inégalité (1) sur $C\Omega$, on aura

$$\left|\int_{C\Omega} z_{n,n}(x) - f[x, g(x)]\,dx\right| \leqslant \int_{C\Omega} \omega(x)\,dx + \int_{C\Omega} \lambda_n(x)\,dx$$

Or $\omega(x)$ est une fonction non négative, dont la valeur est non croissante avec n et tend vers 0 quand cet indice tend vers l'infini. Il s'ensuit que $\int_{C\Omega} \lambda_n(x)\,dx$ a une limite nulle quand n tend vers l'infini.

Comme par ailleurs les fonctions $z_{n,n}(x)$, $f[x, g(x)]$, $\omega(x)$ sont bornées dans leur ensemble par 2M, ou T, on peut étendre les intégrales à l'intervalle I. On a donc.

$$\lim \left|\int_I z_{n,n}(x) - f[x,g(x)]\,dx\right| \leqslant \int_I \omega(x)\,dx$$

or $\int_I f[x,g(x)]\,dx$ a une valeur puisque $g(x)$ est mesurable ; donc si l'intégrale du second membre est nulle $\int_I z_{n,n}(x)\,dx$ aura une limite qui sera précisément $\int_I f[x,g(x)]\,dx$.

On peut donc énoncer la condition suffisante suivante de convergence :

THÉORÈME 2. — *Pour que les intégrales sur 1 des fonctions de la suite $f_n[x,g(x)]$ convergent, il suffit que l'oscillation de la suite $f_n(x_0,y)$ soit nulle au point $< x_0, g(x_0) >$ pour presque toutes les valeurs de $x_0 \in I$ la limite de ces intégrales est alors* $\int_I f[x,g(x)]\,dx$.

II. — SUITES DE FONCTIONS MESURABLES ET CONTINUITE APPROXIMATIVE.

Nous rappelons les définitions de la continuité approximative :

Soit $f(x)$ une fonction mesurable définie sur I ; $x_0 \in$ I. $E(x_0, \varepsilon)$ l'ensemble des points où $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. On a la

DÉFINITION 1. — *$f(x)$ est dite approximativement continue au point x si $E(x_0, \varepsilon)$ a la densité un au point x_0, quel que soit ε.*

Monsieur A. DENJOY (4) a donné la définition équivalente suivante :

DÉFINITION 2. — *$f(x)$ est dite approximativement continue au point x_0, si ε étant un nombre positif donné, on peut lui faire correspondre un nombre positif λ, tel que dans tout intervalle contenant x_0, et de longueur inférieure à λ, la densité relative de l'ensemble $E(x_0, \varepsilon)$ soit supérieure à $1 - \varepsilon$.*

Il est clair que dans cette définition l'intervalle peut être ouvert ou fermé.

Inversement si l'une de ces définitions est satisfaite, on montre (4) qu'il est possible de construire un ensemble $E(x_0, \varepsilon)$ ayant la densité un en x_0, et sur lequel f est continue au point x_0. Nous allons par analogie avec les voisinages ouverts, introduire une définition :

DÉFINITION 3. — *Nous appellerons oscillation approximative $\omega_a(x_0)$ d'une fonction mesurable $f(x)$ au point x_0 la borne inférieure des oscillations de $f(x)$ sur un ensemble E_{x_0} de densité un en x_0.*

On doit à A. DENJOY la propriété suivante (qui se démontre aisément à partir du théorème de LUSIN) :

Toute fonction mesurable est presque partout approximativement continue propriété que nous énoncerons sous la forme suivante :

THÉORÈME 3. — *Toute fonction mesurable a presque partout une oscillation approximative égale à 0.*

Passant ensuite des fonctions mesurables aux suites convergentes $f_n(x)$ de ces fonctions, nous introduisons la

DÉFINITION 4. — *Nous appellerons oscillation approximative $\Omega_\omega(x_0)$ de la suite $f_n(x)$ au point x_0, la borne inférieure des oscillations de la suite $f_n(x)$ en x_0, sur un ensemble E_{x_0} de densité un au point x_0.*

Cette définition posée, nous prouverons l'énoncé suivant qui généralise, pour les suites, la propriété de A. DENJOY.

THÉORÈME 4. — *Soit $f_n(x)$ une suite convergente de fonctions mesurables définies sur $[a, b]$, l'oscillation approximative de la suite est nulle presque partout.*

A chaque fonction $f_n(x)$ nous appliquerons le théorème de LUSIN, en vertu duquel $f_n(x)$ est égale à une fonction continue $f_{n,k}(x)$ sur [a,b] sauf sur un ouvert $O_{n,k}$ de mesure $\eta_{n,k}$

Nous pouvons reprendre ici l'analyse faite pour le théorème d'EGOROFF. et supposer qu'on a $O_{n,k} \supset O_{n,k+1}$, et appeler Ω_n l'ensemble commun aux $O_{n,k}$ ' ou noyau de LUSIN pour $f_n(x)$.

Il est clair que Ω_n est de mesure nulle et que si $x \notin \Omega_{n,k}$, on a aussi $x \notin \Omega_{n,k+p}$

Ceci dit supposons que $x \in [a,b]$ n'appartienne à aucun des noyaux Ω_n, ni au noyau d'EGOROFF Ω correspondant à la suite $f_n(x)$. Soit $[\alpha,\beta] \ni x$ un sous intervalle de $[a, b]$ de longueur λ. Si $x \notin \Omega \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, x appartient à un ensemble $\complement O_{n,k_n}$ pour lequel $\eta_{n,k_n} < \lambda\varepsilon/2^n$

On peut supposer qu'il appartient à un $\complement U_i$, tel que mes $U_i < \lambda\varepsilon/2$ Ainsi on a $x \in \complement U_i \bigcup_{n=1}^{\infty} \complement O_{n,k_n}$ dont la mesure diffère de $|I|$ de

$$\lambda\varepsilon/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\varepsilon/2^{n+1} = \lambda\varepsilon$$

Or sur cet ensemble les f_{n,k_n} sont continues et convergent uniformément. Donc les f_{n,k_n} convergent uniformément dans un intervalle de longueur λ, sur un ensemble de mesure $\lambda\ (1-\varepsilon)$. Ainsi l'oscillation approximative de la suite est nulle au point considéré. Cette oscillation ne peut être différente de zéro que si $x \in \Omega \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, ensemble qui est la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle donc lui-même de mesure nulle *C.Q.F.D.*

Nous allons maintenant rechercher la condition pour qu'une suite de fonctions mesurables $f_n(x)$ converge vers une fonction approximativement continue.

THÉORÈME 5. — *Pour qu'une suite de fonctions mesurables définies sur I converge vers une fonction limite $f(x)$ approximativement continue en tout point de I, il faut et il suffit qu'en tout point $x \in I$ l'oscillation approximative de la suite soit nulle.*

La condition est évidemment suffisante, puisque en tout point $x \in I$ on a $\omega_a(x) \leqslant \Omega_a(x)$

Prouvons que la condition est nécessaire.
Soit $x_0 \in I$, montrons que $\omega_a(x_0) = 0$ on a aussi $\Omega_a(x_0) = 0$. En vertu de la définition (2), comme $\omega_a(x_0) = 0$, ε étant donné, on peut trouver un nombre positif λ tel que sur tout segment $[\alpha\ \beta]$ de longueur λ, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$ sur un ensemble $E(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$ de mesure supérieure à $\lambda\ (1-\frac{\varepsilon}{2})$

Or sur ce même segment, il existe en vertu du théorème d'EGOROFF, un sous-ensemble $[\alpha, \beta] \cap \complement U_i$ de mesure supérieure à $\lambda - \eta_i$ sur lequel on a $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon_i$ pour $n > N\eta_i, \varepsilon_i$.

Prenons $\eta_i < \lambda\frac{\varepsilon}{2}$ $\varepsilon_i < \frac{\varepsilon}{2}$ En ajoutant les deux inégalités que vérifie $f(x)$ il vient pour $n > N\eta_i, \varepsilon_i$

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

sur un ensemble de mesure au moins égale à $\lambda\ (1 - \frac{\varepsilon}{2}) - \lambda\frac{\varepsilon}{2} = \lambda\ (1 - \varepsilon)$
L'oscillation de la suite est bien nulle en x_0, qui est arbitraire dans I.

III. — *ETUDE DE CERTAINES EQUATIONS DIFFERENTIELLES.*

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (2)$$

où f est définie dans un domaine D de R^2, et bornée en module par un nombre M. Nous supposons f de 1^{re} classe. Nous étudierons l'équation (2) dans un rectangle de sécurité R, définie par $|x - x_0| \leqslant h$ $|y - y_0| \leqq Mh$ $R \subset D$
f étant de 1^{re} classe peut être représentée dans R comme limite d'une suite de

fonctions continues $\{f_n(x,y)\}$, fonctions qu'on peut supposer bornées en module par M. D'après le théorème de PEANO chaque équation

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x,y_n) \qquad (3)$$

a, dans R, une solution continue passant par le point $M_0 < x,y_0 >$. En fait l'équation (3) possède en général un faisceau d'intégrales passant par M_0. Pour éviter toute difficulté, nous choisirons parmi ces solutions, l'enveloppe supérieure de toutes les intégrales, qui est aussi une intégrale de (3). Ainsi f_n est bien déterminée pour toute valeur de n.

Pour obtenir une solution de (2), nous allons employer la méthode classique consistant à extraire des y_n, qui sont également continues (puisque lipschitziennes en x pour la constante M), une suite uniformément convergente, y_N et chercherons dans quel cas la limite vérifiera l'équation (2). Nous passerons, comme il est d'usage par les équations intégrales équivalentes aux équations proposées.

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\,[t,y(t)]\,dt \qquad (2\text{-bis})$$

$$y_N = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_N\,[t,y_N(t)]\,dt \qquad (3\text{-bis})$$

et chercherons dans quel cas le second membre de 3-bis, converge vers celui de 2-bis. Il faudra que l'intégrale $\int_{x_0}^{x} f_N\,[t,y_N(t)]\,dt$ converge vers $\int_{x_0}^{x} f\,[t,y(t)]dt$ (cette deuxième intégrale ayant un sens puisque y est continue et que f est de la 1re classe de BAIRE).

Ensuite il faudra prouver que cette dernière intégrale est dérivable par rapport à x, et que cette dérivée est f(x,y).

Ceci conduit à faire sur f deux catégories d'hypothèses a), b) :

— f (x,y) est continue par rapport à y dans les deux hypothèses

— par rapport à la variable x, f(x) est

continue (hypothèse a)
ou approximativement continue (hypothèse b).

Nous allons faire une remarque valable dans les deux cas. Considérons les fonctions $f_n(t,y)$. Elles sont continues en y. $\bar{\varepsilon}$ étant donné, elles possèdent *pour t constant* un module d'uniforme continuité par rapport à $\bar{\varepsilon}$ que nous noterons $\eta_{\bar{\varepsilon},t})\bar{\varepsilon}$ ayant une valeur donnée. L'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs de t, pour lesquelles $\eta_{\bar{\varepsilon},t} < \eta_1$, η étant un nombre donné, tend vers zéro avec n. (Il va de soi que nous entendons par $\eta_{\bar{\varepsilon},t}$ le module d'uniforme continuité maximum compatible avec la constante $\bar{\varepsilon}$).

En effet donnons à η une suite de valeurs décroissantes tendant vers zéro, les η_i. A chaque η_i, correspond un ensemble $\mathcal{E}_i$. Supposons la proposition inexacte, la mesure de $\mathcal{E}_i$ resterait supérieure à un nombre donné α, or on a manifestement $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{E}_{i+p}$ La limite inférieure $\mathcal{E}$ des ensembles $\mathcal{E}_i$ sera différente de ϕ et aura une mesure au moins égale à α. Il y aura des points communs à tous les $\mathcal{E}_i$

Soit $t_0 \in \mathcal{E}$, La fonction f (t_0, y) étant continue en y, on a

$$|f(t_0,y+h) - f(t_0,y)| < \bar{\varepsilon} \text{ pour } |h| < \eta_{\bar{\varepsilon},t_0}$$

Or d'après la construction de $\mathcal{E}$, le module d'uniforme continuité de $f(t_0,y)$ ne saurait être supérieure à η_i (quel que soit i) ; on aurait donc $\eta_i > \eta_{\bar{\varepsilon},t_0}$ ce qui contredit l'hypothèse $\lim \eta_i = 0$

La même démonstration prouve qu'il ne saurait y avoir de points communs à tous les. $\mathcal{E}_j (j \geqslant i)$.

Nous avons donc établi le lemme suivant, (qui traduit la remarque ci-dessus en faisant $\eta_i = 1/2^i$:

Lemme. — $f(x,y)$ étant une fonction bornée sur R, continue en y, $\bar{\varepsilon}$ un nombre positif, $\eta_{\bar{\varepsilon}}$ le module d'uniforme continuité de $f(x,y)$ par rapport à $\bar{\varepsilon}$ pour $x=t$, on peut choisir le η en sorte que l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles $\eta_{\bar{\varepsilon},t} < 1/2^i$ ait une mesure λ_i tendant vers zéro quand i tend vers l'infini.

Nous prouverons l'existence d'une solution de (2) dans l'hypothèse (a), nous bornant à indiquer le principe de la démonstration dans l'hypothèse (b).

Hypothèse a : $f(x,y)$ est continue par rapport à chacune des variables x et y.
Soit $\bar{f}_i(x,y)$ la restriction de $f(x,y)$ à $C\mathcal{E}_i \times [y_0 - Mh, y_0 + Mh]$

Soit (ξ, η) un point de R, $\xi \in C\mathcal{E}_i$. Supposons que ξ ne soit pas point isolé de cet ensemble. Prenons $\xi + k \in C\mathcal{E}_i$ et donnons à η un accroissement l. On a

$$|\bar{f}_i(\xi+k, \eta+l) - \bar{f}_i(\xi, \eta+l)| \leqslant |\bar{f}_i(\xi+k, \eta+l) - \bar{f}_i(\xi+k, \eta)|$$

$$+ |\bar{f}_i(\xi+k, \eta) - \bar{f}_i(\xi, \eta)| + |\bar{f}_i(\xi, \eta) - \bar{f}_i(\xi, \eta+l)|$$

Or $\bar{f}_i$ étant continue par rapport à x, on peut trouver un nombre $k_0(\xi, \eta)$ tel que $|k| < k_0$ entraîne $|\bar{f}_i(\xi + k, \eta) - \bar{f}_i(\xi, \eta)| < \bar{\varepsilon}$ et si $|l| < 1/2^i$ les deux autres crochets sont inférieurs à $\bar{\varepsilon}$. Donc $< \xi, \eta >$ est centre d'un rectangle dans lequel l'oscillation de $\bar{f}_i$ est inférieure à 3ε, soit $R_{\xi,\eta}$ ce rectangle.

Or pour $x = \xi$, constant, il correspond un rectangle ainsi défini à tout point $< \xi, y > \in$ R. On peut donc couvrir le segment $[y_0 - Ml, y_0 + Ml]$ d'abscisse ξ avec un nombre fini de ces rectangles, R_{ξ_l, η_l} Soit R_ξ le minimum des R_{ξ_l, η_l} correspondants. On aura :

$$|\bar{f}_i(\xi+k, y+l) - \bar{f}_i(\xi, y)| < 3\bar{\varepsilon} \quad \text{pour } |k| < R_\xi \quad l < 1/2^i$$

Ainsi si $x \in C\mathcal{E}_i$ et n'est pas point isolé de cet ensemble, on peut lui faire correspondre un intervalle sur lequel $\bar{f}_i(x,y)$ est continue, le module d'uniforme continuité en y pour la constante $\bar{\varepsilon}$, $\eta_{\bar{\varepsilon},x}$ étant au moins égal à $1/2^i$

Montrons maintenant qu'on peut supposer $C\mathcal{E}_i$ fermé. Soit ξ_0 un point d'accumulation de $C\mathcal{E}_i$, $\xi_0 + h \in C\mathcal{E}_i$, on a

$$|f(\xi_0, y+l) - f(\xi_0, y)| \leqslant |f(\xi_0, y+l) - f(\xi_0+h, y+l)|$$

$$+ |f(\xi_0+h, y+l) - f(\xi_0, y+l)| + |f(\xi_0, y+l) - f(\xi_0, y)|$$

Or on peut, l étant fixé $(|l| < \frac{1}{2^i}$ p.ex.) rendre les deux crochets extrêmes arbitrairement petits par suite de la continuité de f par rapport à x. On a donc $|f(\xi_0, y + l) - f(\xi_0, y)| \leqslant \bar{\varepsilon}$. Ceci étant vrai quel que soit $|l| < \frac{1}{2^i}$ on en déduit que le module d'uniforme continuité en y de f pour la constante $\bar{\varepsilon}$ au point ξ_0 est au moins égal à $1/2^i$. Donc $\xi_0 \in \mathcal{E}_i$

$C\mathcal{E}_i$ étant ainsi caractérisé, il résulte du lemme que i peut être choisi assez grand pour que λ_i soit inférieur à tout nombre positif donné à l'avance. Pour achever la démonstration, il nous faut

1) construire une suite de fonctions $f_n(x,y)$ tendant vers $f(x,y)$;

2) prouver que l'équation 3-bis tend vers l'équation 2-bis ;

3) vérifier que $f(x,y)$ est la dérivée de $\int_{x_0}^{x} f[t,y(t)]dt$.

1) *Construction de la suite* $f_n(x,y)$. — $f(x,y)$ étant supposée de 1re classe est limite d'une suite de fonctions continues dans R, $\varphi_n(x,y)$ à chacune desquelles correspondrait une équation intégrale 3-bis ; de la suite de solutions $\tilde{y}_n$, on pourrait extraire une sous-suite convergeant vers une limite $\tilde{y}$. Mais rien ne permet d'affirmer que l'intégrale du second membre de 3-bis, tendrait vers celle correspondante de 2-bis. Il faudrait que l'oscillation de la suite $\varphi_n(x,y)$ soit nulle au point $< x, \tilde{y}(x) >$, si l'on veut appliquer *le théorème 2*, et cela presque partout sur I.

Il est préférable de construire une suite $f_n(x,y)$ qui soit continue en y pour toute valeur de x, et égale à $f(x,y)$ à partir d'une certaine valeur de n. Nous aurons démontré en même temps que $f(x,y)$ est de première classe.

Dans ce but nous donnerons à ε une suite de valeurs décroissantes ε_j tendant vers zéro.

A ε_1, nous ferons correspondre l'ensemble $C\mathcal{E}_{i_1}$ pour lequel $\lambda_{i_1} < \frac{1}{2}$ ce qui entraînera l'adoption pour le module d'uniforme continuité correspondant d'une limitation inférieure $1/2^{i_1}$. On aura $\eta_{\varepsilon_1,t} > 1/2^{i_1}$ sur $C\mathcal{E}_{i_1}$

De même à $\mathcal{E}j$ correspondra un ensemble $C\mathcal{E}_{i_j}$, avec $\lambda_{i_j} > 1/2^{i_j}$ et on aura sur $C\mathcal{E}_{i_j}$ $\eta_{\varepsilon_j,t} > 1/2^{i_j}$

A chaque ensemble $C\mathcal{E}_{i_j}$, correspondra une fonction $\bar{f}_i$, que nous noterons $\bar{f}_{i_j}(x,y)$ et *qui sera égale à* f *sur* $C\mathcal{E}_{i_j}$

Soit $f_1(x,y)$ la fonction égale à $f_{i_j}(x,y) = f(x,y)$ sur $F_1 = \bigcap_{j=1}^{\infty} C\mathcal{E}_{i_j}$ (F_1 étant fermée puisqu'intersection d'ensembles fermés). Nous compléterons f_1 sur les intervalles contigus à F_1, en lui imposant d'être linéaire en x (pour y constant) dans ces intervalles. Les modules d'uniforme continuité de la fonction f_1 ainsi obtenue seront les mêmes pour chaque valeur de ε_j, quel que soit x. Autrement dit *la famille de fonctions* $f_1(x_0,y)$, *où* x_0 *est un indice variable, forme une famille également continue en* y.

Nous définirons de même $f_2(x,y)$ égale à $f_{i_j}(x.y) = f(x,y)$ pour $x \in \bigcap_{j=2}^{\infty} C\mathcal{E}_{i_j} = F_2$; nous complétons ensuite f_2 en linéarisant cette dernière fonction pour y contant, dans les intervalles contigus à F_2. Ici encore la famille $f_2(x_0,y)$ où x_0 joue le rôle d'un indice, formera une famille également continue en y.

Nous définirons de même $f_3(x,y)$ ... $f_n(x,y)$ ....

Il est clair d'autre part que $F_1 \subset F_2 \subset$ *et que* $\lim_{n\to\infty} F_n = I$ puisque la différence entre sa longueur et la somme des mesures des $C\mathcal{E}_{i_j}$, $j > n$ est inférieure à $1/2^{n-1}$ d'après le choix des λ_{i_j}.

Comme $f_n(x,y) = f(x,y)$ en tout point de F_n, il en résulte qu'on a quel que soit n, $\lim_{n\to\infty} f(x,y) = f(x,y)$

2) *Validité du passage à la limite dans l'équation intégrale.*

Reprenons l'équation 3-bis $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_N(t,y_N(t))dt$

Les indices N ayant été choisis, en vertu du théorème d'ASCOLI, de façon que y_N tende (uniformément) vers une limite y (x) le premier membre tend vers y (x) par définition.

D'autre part pour N assez grand, $f_N[t, y_N(t)] = f[t, y_N(t)]$ et f étant continue en y, $f[t, y_N(t)]$ tend vers $f[t, y(t)]$. Les f_N étant bornées et mesurables (puisque continues) on peut en vertu du théorème de LEBESGUE[2] passer à la limite sous le signe $\int$ et on a bien

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]dt, \text{ c'est-à-dire 2-bis}$$

3) *Equivalence de l'équation intégrale et de l'équation différentielle.*

Nous devrons d'abord prouver un lemme. Ensuite nous aurons à utiliser ce qui a été dit au début de ce paragraphe (III, hypothèse a) pour la démonstration de la continuité de la fonction notée $f_1(x,y)$.

Lemme. — *x_1 étant un point de I, il existe un nombre N_1 tel que pour $n \geqslant N_1$ la densité de F_n en x_1 soit égale à un.*

Appelons $\varphi_n(x)$ la fonction caractéristique de F_n. $\varphi_n(x)$ est mesurable. D'autre part comme la limite de F_n est l'intervalle I, on a pour tout point $x_0 \in I$, $\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x_0) = \varphi(x_0) = 1$

$\varphi(x)$ étant continue, est approximativement continue. Donc on peut appliquer à la suite $\{\varphi_n(x)\}$ *le théorème 5.*

Soit $x_1 \in I$, en vertu du théorème précité, l'oscillation approximative de la suite $\{\varphi_n(x)\}$ est nulle au point x_1, donc en vertu de la *définition 4,* il existe un ensemble E_{x_1} de densité un en x_1, sur lequel l'oscillation de la suite $\{\varphi_n(x)\}$ en x_1 est inférieure à tout nombre positif donné, c'est dire qu'il existe un nombre N_1, auquel correspond un intervalle δ_1, $[x_1-k_1, x_1+k_1]$, tel que l'oscillation de l'ensemble des valeurs de $\varphi_n(x)$, $n > N_1$, $x \in \delta_1 \cap E_{x_1}$ soit inférieure à α, α étant un nombre positif donné.

Or φ_n ne pouvant prendre que les valeurs zéro et un, $\varphi_n(x) = 1$ pour $x \in \delta_1 \cap E_{x_1}$, et $n > N_1$

Donc pour $n \geqslant N_1$, la densité de F_n au point x_1 est égale à un. C.Q.F.D.

Ce point établi, soient deux points du graphe de y (x), d'abscisses respectives x_1, $x_1 + k$; $x_1 \in F_j$, $x_1 + k \in F_j$.
Formons la différence $\Delta f_k \leqslant f[x_1+k, y(x_1+k)] - f[x_1, y(x_1)]$
On a :

$$|\Delta f_k| \leqslant \left| f[x_1+k, y(x_1+k)] - f_N[x_1+k, y_N(x_1+k)] \right|$$
$$+ \left| f_N[x_1+k, y_N(x_1+k)] - f_N[x_1, y_N(x_1)] \right| + \left| f_N[x_1, y_N(x_1)] - f[x_1, y(x_1)] \right|$$

y_N tendant uniformément vers y, et f étant également continue en y pour $x \in F_j$, il existe un indice N_0, tel que pour $N > N_0$ l'on ait

$$|y(x) - y_N(x)| < 1/2^{ij}$$

ce qui entraîne, $|f[x, y(x)] - f[x, y_N(x)]| < \varepsilon_j$
N étant ainsi choisi, les deux crochets extrêmes sont inférieurs à ε_j, quant au

second, d'après ce que l'on a vu ci-dessus, il est inférieur à $3\varepsilon_j$ si la double condition suivante est remplie

$$|k| < k_{x_1} \qquad |y_N(x_1+k) - y_N(x_1)| < 1/2^{i_j}$$

condition qui d'après (3-bis) est vérifiée pour $|k| < 1/M.2^{i_j}$; k étant assujetti à cette double limitation, N supérieur ou égal au plus grand des deux nombres N_0 et j, on $|\Delta f| \leqslant 5\varepsilon_j$.

Remarquons que N_0 et j, augmentant avec l'indice j, on peut les supposer tous deux supérieurs à N_1. Donc la densité de Fj au point x_1 est égale à un.

D'après *la définition 2,* on peut trouver un nombre λ, tel que dans tout intervalle de longueur inférieure à λ, renfermant x_1, la densité relative de F_j soit supérieure à $1-\omega$, ω étant un nombre positif donné.

On peut encore assujettir $|k|$ à être inférieur à $\lambda/2$

Ceci dit, reprenons l'équation 2-bis, et intégrons entre x_1 et $x_1 + k$ on a

$$y(x_1+k) - y(x_1) = \int_{x_1}^{x_1+k} f[t,y(t)]dt$$

or d'après la manière dont on a choisi k, on a dans cet intervalle

$$|f[t,y(t)] - f[x_1,y(x_1)]| < |\Delta_k f|$$

On a donc

$$\left| y(x_1+k) - y(x_1) - kf[x_1,y(x_1)] \right| < \int_{x_1}^{x_1+k} |\Delta_k f|\,dt < k[5\varepsilon_j + 2M\omega]$$

or ε_j et ω étant arbitraires on a bien

$$\lim_{k\to 0} \frac{y(x_1+k) - y(x_1)}{k} = f(x_1, y_1)$$

Hypothèse b. f (x,y) est continue par rapport à y, approximativement continue par rapport à x.

Le raisonnement est très proche de celui fait dans la précédente hypothèse, nous nous bornons à l'esquisser. Le seul vrai problème consiste à construire la suite $f_n(x,y)$.

Pour cela nous définissons $\bar{f}_i(x,y)$ comme dans le cas précédent. Mais au voisinage du point $(\xi\,\eta)$ on n'aura $|f(\xi+k,\eta) - f(\xi,\eta)| < \bar{\varepsilon}$ que pour un ensemble de valeurs de k de densité un en ξ

On vérifiera sans peine qu'il existe une sorte d'approximative continuité uniforme pour $x \in C\,\mathcal{E}_i$ constant, et à chaque $\xi \in C\,\mathcal{E}_i$ il correspondra une bande u_ξ, dans laquelle les valeurs de $x = \xi + k$ pour lesquelles le module d'uniforme continuité de f_i sera supérieur à $\eta_{\bar{\varepsilon},\xi}$ forment un ensemble e_ξ de densité un en ξ. ξ sera dit point générateur de l'intervalle u_ξ. Comme e_ξ aura dans u_ξ une densité relative $1 - \lambda$, λ tendant vers zéro avec $|u_\xi|$, on pourra remplacer e_ξ par un ensemble f_ξ fermé de densité relative $1 - 2\lambda$ dans u_ξ. Nous supposerons u_ξ fermé. Posons.

$$\bar{f}_i(x,y) = f(x,y) \qquad x \in f_\xi$$

Chaque point $\xi \in I$ engendrant une infinité de u_ξ, de longueur arbitrairement petite, on pourra couvrir [a,b] avec un nombre fini de ces intervalles les

u_{ξ_i} en vertu du lemme de LUSIN[5], chaque point ξ étant compris dans l'intervalle fermé qu'il engendre $f_i(x,y)$ sera alors définie dans tout [a,b] à partir de ses valeurs dans chaque bande, les valeurs de x correspondantes formant un ensemble fermé $F_i = \bigcup f_{\xi_i}$ sur lequel $\bar{f}_i = f$.

Ayant ainsi obtenu les fonctions $\bar{f}_i$ correspondant à des subdivisions successives et à des valeurs de λ tendant vers zéro, on passera aux $\bar{f}_{i_j}$, puis aux f_i comme on l'a fait dans la précédente hypothèse.

On obtiendra ainsi une suite de fonctions tendant visiblement vers f (x, y) presque partout. L'on prouverait alors que l'existence de valeurs x_1 de x pour lesquelles la convergence ne serait pas assurée, est incompatible avec l'approximative continuité de f(x,y) par rapport à x, pour $x = x_1$:

La suite f_n obtenue, la convergence des intégrales et l'équivalence des équations différentielle et intégrale, se démontrent comme dans l'hypothèse (a).

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 6. — *L'équation différentielle* $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ *où f est définie et localement bornée dans un voisinage du point* (x_0, y_0) *admet au moins une solution passant par ce point, définie dans un rectangle de sécurité intérieur au voisinage précité, moyennant l'hypothèse de la continuité de f par rapport à chacune des variables x et y.*

Nous donnons le même résultat comme certain sous les hypothèses moins restrictives suivantes : continuité de f par rapport à y, continuité approximative par rapport à x.

Il est possible avec cette catégorie de fonctions d'obtenir des critères d'unicité. En fait les critères obtenus pour f continue, s'appliquent aussi aux fonctions que nous avons étudiées.

Remarquons que si l'on suppose f (x, y) continue en x, lipschitzienne en y pour une constante k(x), variable avec x, f satisfait aux conditions du *théorème 6*. Introduisons une nouvelle définition.

DÉFINITION 5. — *Une fonction f(x,y) sera dite sommablement lipschitzienne sur I si elle vérifie l'inégalité*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < k(x)\,|y_1 - y_2|$$

k(x) étant une fonction positive de x sommable sur I.

Ceci posé on a le résultat suivant :

THÉORÈME 7. — *L'équation différentielle* $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ *où f est continue en x, sommablement lipschitzienne en y et bornée, dans un voisinage de* (x_0, y_0) *admet une solution et une seule passant par ce point, dans un rectangle de sécuriété. R, compris dans le voisinage précité.*

D'après le *théorème 6* l'existence est garantie. Prouvons qu'il y a unicité. Nous emploierons à cette fin un raisonnement dû à JORDAN[6]. Supposons qu'on ait deux solutions y_1 et y_2 de l'équation différentielle passant par (x_0, y_0), définies dans I, base du rectangle de sécurité R. On aurait :

$$\left|\frac{d}{dx}(y_1 - y_2)\right| = |f(x_1,y_1) - f(x_1,y_2)| < k(x)\,|y_1 - y_2|$$

Supposons que y_1-y_2 ne soit pas nul pour tous les x tels que $x_0 \leqslant x \leqq x_1$, et soit m le maximum de $|y_1-y_2|$ pour ces valeurs de x.

En intégrant l'inégalité précédente on aurait :

$$|y_1-y_2| < m \int_{x_0}^{x_1} k(x)\,dx$$

donc $1 < \int_{x_0}^{x_1} k(x)\,dx$

Il faudrait que $\int_{x_0}^{x_1} k(x)\,dx > 1$ pour qu'il n'y ait pas contradiction. Or k (x) étant positif, son intégrale est non décroissante. On a donc

$$y_1 = y_2 \quad \text{tant que} \quad \int_{x_0}^{x_1} k(x)\,dx < 1$$

Mais on peut recommencer le raisonnement à partir de x_1. Les deux solutions doivent donc nécessairement coincider dans R.

Ce résultat, que nous avons déjà obtenu par un tout autre procédé, est encore valable si f(x,y) est seulement supposée approximativement continue en x.

Remarque.

A l'occasion de la démonstration des deux lemmes qui nous ont servi à établir le théorème 6, nous avons obtenu les résultats suivants :

1) Une fonction numérique de 2 variables définie dans un domaine de R^2, continue par rapport à chacune de celles-ci, est une fonction approximativement continue par rapport à l'ensemble de ces deux variables.

2) Si on a sur un intervalle I, une suite d'ensembles mesurables E_1, E_2,... tels que $E_1 \subset E_2 \subset E_3$...., et que $\lim_{n\to\infty} E_n = I$, à tout point x_0 de I, il correspond un indice N_{x_0}, tel que pour $n \geqslant N_{x_0}$, la densité de E_n au point x_0 soit égale à un.

Département de Mathématiques de la
Faculté des Sciences de Saigon

BIBLIOGRAPHIE

1) F. Riesz et S. Nagy. — Leçons d'Analyse Fonctionnelle. (Ac. des Sc. de Hongrie, 2e éd., 1953, p. 39).

2) H. Lebesgue. — Leçons sur l'intégration, Gauthier-Villars, 2e éd., 1950, p. 120, 125 et 198.

3) *cf. supra*, notre note sur les suites de fonctions intégrables au sens de Riemann, 1re partie.

4) A. Denjoy. — Mémoire sur la Dérivation et son calcul inverse. Gauthier-Villars, 1954, p. 141 à 149.

5) cf. St. Kempisty. — Fonctions d'intervalle non additives. Hermann et Cie. 1939, p. 8.

6) cf. G. Valiron. — Equations fonctionnelles, Masson et Cie, 1945, p. 328.

Ann. Fac. Sci. Saigon, **1961**, *19-28.*

Sur les suites de fonctions intégrables au sens de Riemann

par

A. PACQUEMENT

L'analyse classique, avec l'intégrale de RIEMANN, n'avait pu conduire à un résultat général sur la convergence des intégrales de suites de fonctions. Seul, un résultat partiel, avait été obtenu par ARZELÀ. En fait, l'énonce d'ARZELÀ était justiciable d'une extension qui permet d'édifier une théorie générale de l'intégrale. C'est cette extension qui fait l'objet de la présente étude, établissant ainsi une transition entre le point de vue classique et celui de LEBESGUE.

Nous nous bornerons à l'étude des fonctions numériques, définies sur un intervalle fermé $[a, b]$ de R $(a < b)$, de longueur l.

Nous rappellerons d'abord l'énoncé d'ARZELÀ dont nous donnerons une démonstration que nous croyons inédite, ainsi que quelques conséquences de ce théorème. Nous indiquerons ensuite une extension de l'énoncé d'ARZELÀ, qui conduit à une première extension de la famille des fonctions intégrables ainsi qu'à une propriété intéressante de ces fonctions, présentant une profonde analogie avec le théorème de LUSIN sur les fonctions mesurables.

Enfin on étudiera les rapports de la famille de fonctions ainsi obtenues avec celle des fonctions mesurables.

I. — *LE THEOREME D'ARZELÀ.*

L'énoncé original d'ARZELÀ faisait intervenir la notion de *convergence quasi-uniforme :* cet énoncé et une démonstration se trouvent dans les « Leçons sur les fonctions de variables réelles » d'E. BOREL. Une autre démonstration basée sur la convergence des intégrales de suites monotones de fonctions est donnée dans les « Leçons d'Analyse Fonctionnelle » (2) de F. RIESZ et S. NAGY, entre autres.

Ces démonstrations sont largement inspirées des méthodes postérieures par lesquelles on établit la convergence des intégrales de suites de fonctions mesurables. Ici nous donnerons une méthode autonome qui ne fait appel qu'au caractère d'intégrabilité (R) des fonctions considérées. Nous démontrerons l'énoncé suivant, équivalent en substance à celui d'ARZELÀ.

THÉORÈME 1. — *Si une suite uniformément bornée de fonctions $f_n(x)$, intégrables R sur I, converge vers une fonction f (x), possédant la même propriété, l'intégrale sur I de f (x) est la limite des intégrales de $f_n(x)$.*

Dans la suite les quantités η, ε, λ, h désigneront des nombres positifs donnés à l'avance, η_i, ε_i,... des suites décroissantes de nombres positifs tendant vers zéro ; M désignera la borne supérieure des $|f_n(x)|$.

Introduisons une définition qui s'avèrera utile dans la suite :

Soit un point d'abscisse $x \in I$, δ_x un intervalle centré sur x de longueur $|\delta_x|$. Soit M_{N,δ_x} la borne supérieure de $f_n(x+h)$, $x+h \in \delta_x$ pour $n \geqslant N$.

Appelons ensuite $M_N(x)$ la limite de $M_{N\,\delta_x}$ quand $|\delta_x|$ tend vers 0 ; soit M (x) la limite de $M_N(x)$ quand N tend vers l'infini.

On appellera M (x) le maximum de la suite au point x ; on définirait de même le minimum m (x), et l'oscillation ω (x) de la suite au point x.

Tout point où $\omega(x) \neq 0$ sera dit de *discontinuité pour la suite f* . L'ensemble $\mathcal{E}$ de ces points formera l'*ensemble des discontinuités de la suite.* La définition de $\mathcal{E}$ *entraîne deux conséquences ;*

a) Si $x \notin \mathcal{E}$; pour tout intervalle $\delta_x \ni x$, il existe un entier ν_x tel que $\omega_{n,\delta_x} < \varepsilon$ pour $n \geqslant \nu_x$.

b) Si $x \in \mathcal{E}$; pour tout $\delta_x \ni x$, on peut faire correspondre un entier ν_x tel que $\omega_{n,\delta_x} > \frac{1}{2}\omega(x)$ pour $n \geqslant \nu_x$

On peut, pour simplifier, sans restreindre la généralité, supposer $f(x) \equiv 0$ et $f_n(x) \geqslant 0$ alors $m(x) \equiv 0$; $M(x) = \omega(x)$.

Soit E_η le sous-ensemble des points de $\mathcal{E}$ pour lesquels on a $\omega_x \geqslant \eta$. Nous allons prouver le lemme suivant :

LEMME. — *L'ensemble E_η est de mesure de* JORDAN *nulle.*

Il résulte tout d'abord de la définition de E_η que cet ensemble est fermé. Soit $|E|$ sa mesure extérieure de JORDAN.

Considérons une subdivision de [a, b] de module inférieur à λ et étudions les intégrales par excès et par défaut de $f_n(x)$ pour cette subdivision.

D'après la définition de la mesure extérieure, on peut trouver un recouvrement de E_η avec des intervalles de longueur respective inférieure à λ et d'une longueur totale comprise entre $|E|$ et $|E| + \varepsilon$. Les extrémités de ces intervalles pris dans l'ordre croissant, déterminent un nombre fini de segments σ_i, de longueur respective inférieure à λ, dont nous inclurons les extrémités dans la subdivision de [a, b] pour laquelle nous étudions les intégrales par défaut et par excès de $f_n(x)$.

A l'intérieur de chaque σ_ℓ, on choisira un point x_ℓ. et un intervalle $\delta_{x_\ell} \subset \sigma_\ell$ pour lequel on aura, d'après la propriété (b) $\omega_{n,\delta_{x_\ell}} > \frac{1}{2}\eta$ pour $n \geqslant N_\ell$. Si on prend $n > N_\lambda = \max N_\ell$, l'oscillation de $f_n(x)$ sur chacun des σ_ℓ sera supérieure à $\frac{1}{2}\eta$; la différence entre les intégrales par excès et par défaut sera alors au moins égale à $\frac{1}{2}\eta\,|E|$.

Prouvons que l'on peut supposer N_λ borné, quand $\lambda \to 0$. Donnons à λ une suite de valeurs λ_i. Si N_{λ_i} est non bornée, on peut trouver une suite d'intervalles $\delta_{\xi_i}(\xi_i \in E_\eta)$ de longueurs respectives inférieures à λ_i, pour lesquelles l'indice ν_{ξ_i} devrait croître indéfiniment.

Or ces δ_{ξ_i} définiraient un point d'accumulation ξ On a $\xi \in$ E puisque E est fermé. Or à ξ correspond en vertu de la propriété (b) un intervalle δ_ξ pour lequel $\omega_{\xi,\delta_\xi} > \frac{1}{2}\eta$ pour $n \geqslant \nu_\xi$

Or pour λ_i assez grand on a $\delta_{\xi_i} \subset \delta_\xi$. On peut donc choisir $\nu_{\xi_i} < \nu_\xi$ Il y a contradiction.

On peut donc supposer N_λ borné : soit N sa borne ; pour tout $n \geqslant N$ on a, comme on l'a vu,

$$\overline{\int_a^b} f_n(x)\, dx - \underline{\int_a^b} f_n(x)\, dx > \frac{1}{2}\eta\ |E|$$

Or par hypothèse $f_n(x)$ est intégrable R. On a donc $|E| = 0$.

*Démonstration du théorème d'*ARZELÀ. — Avec les hypothèses faites sur les $f_n(x)$ on a

$$0 \leqq \int_a^b f_n(x)\, dx \leqslant \int_a^b M_n(x)\, dx$$

Or considérons les intervalles de la subdivision [a, b] de module λ. E_η étant un ensemble de mesure J nulle peut être enfermé dans un nombre fini d'intervalles de longueur individuelle $< \lambda$, et d'une longueur totale $< \varepsilon$.

La contribution de ces intervalles dans l'évaluation de $\int_a^b M_n(x)\, dx$ sera au plus de M ε ; celle des autres intervalles n'excédera pas η (b — a). On a donc

$$0 < \int_a^b f_n(x)\, dx < M\varepsilon + \eta\,(b\text{-}a)$$

Donc lim $\int_a^b f_n(x)\, dx = 0$ quand $n \to \infty$. C.Q.F.D.

COROLLAIRES. — Nous nous bornons à indiquer quelques corollaires du théorème d'ARZELÀ tel que nous l'avons démontré. Toutes les suites $f_n(x)$ sont supposées convergentes et uniformément bornées :

1) *Pour qu'une suite $f_n(x)$ de fonctions intégrables (R) ait une limite intégrable (R), il faut et il suffit que les points où l'oscillation de la suite surpasse η, forment un ensemble E de mesure de* JORDAN *nulle.*

La nécessité a été prouvée dans notre lemme ci-dessus ; la suffisance résulte d'un théorème de DU BOIS REYMOND [3].

2) *Pour qu'une suite $f_n(x)$ de fonctions intégrables (R) ait une limite intégrable (R), il faut et il suffit que les points de discontinuité de la suite forment un ensemble de mesure nulle.*

On donnera à η une suite de valeurs η_i, pour lesquelles on aura mes. ext. $E_{\eta_i} < \varepsilon_i$, et $\Sigma\, \varepsilon_i = \varepsilon$. On a ainsi prouvé la nécessité ; la suffisance résulte d'un théorème de LEBESQUE [3].

3) *Cas des fonctions continues.* — Du corollaire (1) on déduit aussitôt que : *si une suite de fonctions continues tend vers une limite continue, les points de l'oscillation de la suite surpasse η, forment un ensemble de mesure J nulle.*

Pour les autres points on a $|f - f_n| < \eta$ *sur un nombre fini de segments d'une longueur totale b-a-ε, pour n assez grand.*

Nous allons maintenant passer au cas où la limite des f_n n'est plus supposée intégrable (R).

II. — *L'EXTENSION DE THEOREME D'ARZELÀ.*

Nous considérerons deux suites de fonctions, bornées dans leur ensemble, intégrables R, convergeant vers une même limite f (x). Soient $f_n(x)$, $\varphi_n(x)$ les dénominations respectives des fonctions des deux suites ; M la borne supérieure des quantités $|f_n(x)|$ et $|\varphi_n(x)|$. On a, de par la définition des deux suites, p désignant un entier constant

$$\lim_{n\to\infty} \left| f_n(x) - \varphi_{n+p}(x) \right| = 0$$

on peut appliquer le théorème d'ARZELÀ à la suite $f_n(x) - \varphi_{n+p}(x)$ (x)
on a donc $\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_n(x) - \varphi_{n+p}(x)]\, dx = 0$

Donc ε étant donné, à tout entier p on peut faire correspondre un nombre N_p tel que pour $n \geqslant N_p$ on ait

$$\left| \int_a^b [f_n(x) - \varphi_{n+p}(x)]\, dx \right| < \varepsilon$$

Nous allons prouver qu'*on peut supposer* N_p *borné quand* $p \to \infty$. En effet, p étant constant, il correspond à la suite $f_n(x) - \varphi_{n+p}(x)$ un ensemble de discontinuités $\mathcal{E}_p$ Posons $H = \bigcup \mathcal{E}_p$ (p = 1, 2, ...) : Les $\mathcal{E}_p$ étant de mesure nulle, il en est de même de H, qu'on peut recouvrir avec une suite d'intervalles u_i, d'une longueur totale inférieure à λ. Cherchons une limitation de l'intégrale $\int_a^b [f_n(x) - \varphi_{n+p}(x)]\, dx$. Deux cas se présentent :

— $x \in H$: on lui fera correspondre l'intervalle u_i qui le renferme.

— $x \notin H$: on peut lui faire correspondre un intervalle v_x dans lequel l'oscillation de $f_n(x) - \varphi_{n+p}(x)$ sera inférieure à η, quel que soit p, pour $n \geqslant N_x$, N étant un entier fonction de x. En effet dans le cas contraire on aurait $x \in H$.

Ainsi tout point $x \in [a, b]$, appartient soit à un u_i, soit à un v_x, on peut donc couvrir [a, b] avec un nombre fini de ces intervalles, que nous noterons u_j, et v_k. A chaque v_k correspond un indice N_x du point x qui détermine v_k ; nous notons cet indice N_k. Si on a $n \geqslant \max N_k$ on a quel que soit p :

$$\left| \int_a^b [f_n(x) - \varphi_{n+p}(x)]\, dx \right| < 2M\lambda + \eta\,(b - a) \quad (1)$$

De cette formule on peut tirer diverses conséquences :

a) Pour faciliter l'exposé on a supposé les suites $f_n(x)$, $\varphi_n(x)$ distinctes, mais ceci n'intervient pas dans les raisonnements. On peut poser $\varphi_n(x) = f_{n+1}(x)$ par exemple.

Alors l'équation (1) prouve que $\int_a^b f_n(x)\, dx$ forme une suite de Cauchy, et a donc une limite. Si f_n, et φ_n sont deux suites distinctes, elle prouve que $\int_a^b \varphi_n(x)\, dx$ a aussi une limite et que les deux limites sont les mêmes. On a donc l'extension suivante du théorème d'ARZELÀ :

THÉORÈME 2. — *Considérons des suites de fonctions, intégrables, R, bornées dans leur ensemble, tendant vers une même limite f (x). Les intégrales des fonctions d'une même suite, tendent vers une limite déterminée, indépendante de la suite considérée.*

Nous appellerons cette limite l'intégrale R' de f (x).

b) Nous avons vu, en démontrant la formule (1), que pour une certaine valeur N, on avait, en remplaçant φ par f, pour $n \geqslant N$

$$\left| f_n(x) - f_{n+p}(x) \right| < \eta$$

sauf pour les points d'un nombre fini de segments d'une longueur totale inférieure à λ.

Ceci posé, donnons à η et λ, les suites de valeurs respectives η_i et λ_i. A chaque couple η_i, λ_i correspond un N_i ; on peut supposer $N_i < N$. Posant dans l'inégalité précédente $n = N_i$, $n+p = N_{i+1}$, il vient :

$$\left| f_{N_i}(x) - f_{N_{i+1}}(x) \right| < \eta_i$$

sauf si x appartient à la réunion d'un nombre fini de segments, u_i, d'une longueur totale inférieure à λ_i. Or on a :

$$f = \lim f_{N_i} = f_{N_1} + (f_{N_2} - f_{N_1}) + (f_{N_3} - f_{N_2}) + \ldots$$

d'où : $\left| f - f_{N_i} \right| < \sum \eta_i$, sauf si $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} u_i$ ensemble ouvert d'une mesure inférieure à $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots = \sum_1^{\infty} \lambda_i$

Posant ici $\eta = \sum \eta_i$, $\lambda = \sum \lambda_i$, on voit que f diffère de f_{N_1}, c'est-à-dire d'une fonction intégrable R de η au plus, sauf aux points d'un ouvert de mesure λ.

On a donc l'énoncé suivant, qui n'est qu'un aspect du théorème de LUSIN.

THÉORÈME 2. — *Si f (x) est limite d'une suite de fonctions intégrables R, bornées dans leur ensemble, f (x) elle-même diffère de η au plus d'une fonction intégrable R, sauf peut-être aux points d'une infinité dénombrable d'intervalles de longueur totale inférieure à λ.*

III. — *PASSAGE AUX FONCTIONS MESURABLES.*

Nous appellerons, pour abréger, intégrables R' les fonctions que nous avions étudiées, obtenues comme limites de suites bornées de fonctions intégrables R. On peut se demander si ces fonctions intégrables R', sont aussi générales que les fonctions mesurables. En fait il semble que cette équivalence n'ait lieu qu'à un ensemble de mesure nulle près.

Pour avoir une théorie homogène, nous utiliserons une idée de F. RIESZ (5), qui permettra d'obtenir une intégrale analogue à celle de RIEMANN mais d'un maniement plus souple.

a) INTÉGRALES R_1. — F. RIESZ définit comme suit le *vrai maximum* d'une fonction dans un intervalle u, c'est le nombre M tel qu'on ait :

$$f(x) \leq M \qquad \text{pour } x \in u$$

sauf, au plus, pour les points d'un ensemble de mesure nulle.

On définit de même le *vrai minimum,* la *vraie oscillation* de f (x) dans u. Si l'on substitue dans la définition classique des intégrales supérieure et inférieure de DARBOUX, dans chaque intervalle des subdivisions successives, les maximum et minimum de la fonction à intégrer, par ses vrais maximum ou minimum, on aura des intégrales par excès et par défaut que l'on pourra appeler *vraie intégrale supérieure et vraie intégrale inférieure.*

Quand ces deux intégrales seront égales, la fonction sera dite intégrable R_1.

Il est clair que l'intégrale R_1 jouit des mêmes propriétés que l'intégrale de RIEMANN classique. Elle vérifie notamment le théorème d'ARZELÂ et son extension (théorèmes 1 et 2 supra).

Enfin l'intégrale R_1 n'est pas modifiée quand on change les valeurs de la fonction à intégrer sur un ensemble de mesure nulle.

b) INTÉGRALES R'_1. — D'après le *théorème 2,* les intégrales de suite convergentes uniformément bornées, de fonctions intégrables R_1, convergent vers une valeur déterminée, qui ne dépend que de la fonction limite.

Nous appellerons « intégrales R'_1 *» la limite des intégrales d'une suite ainsi définie.*

Il est clair que comme l'intégrale R_1, l'intégrale R_1, ne change pas quand on modifie la fonction limite aux points d'un ensemble de mesure nulle.

Nous allons prouver l'équivalence des fonctions intégrables R'_1 *avec les fonctions mesurables.*

Soit $\mathcal{F}$ la famille des fonctions intégrables R'_1, définies sur [a, b] bornées dans leur ensemble. Nous allons, pour simplifier, utiliser la terminologie des espaces vectoriels, et structure la famille $\mathcal{F}$ en un espace vectoriel $\mathcal{E}$.

Soient $f \in \mathcal{F}$ et $g \in \mathcal{F}$, nous définirons une semi-norme sur $\mathcal{E}$ comme suit : on posera

$$\|f - g\| = \lim_{n \to \infty} \int_{a_1}^{b} |f_n(x) - g_{n+p}(x)| \quad dx$$

où f_n et g_n représentent deux suites de fonctions intégrables R_1 tendant respectivement vers f et g. On a désigné par le symbole $\int_{a_1}^{b}$ l'intégration R_1. Nous savons d'après le *théorème 2* que cette semi-norme est indépendante des suites considérées, ainsi que du nombre p. Ceci dit on a le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — *L'espace* $\mathcal{E}$ *des fonctions intégrables* R'_1, *bornées dans leur ensemble est un espace complet.*

Soit une suite de fonction $\varphi_k \in \mathcal{F}$, formant une suite de Cauchy :

$$\|\varphi_{k_i} - \varphi_{k_i+p}\| < \varepsilon_i \qquad \text{pour } k_i \geq K_i$$

Nous supposerons $K_{i+1} > K_i$ et prendrons $k_i + p \geqslant K_{i+1}$ On a donc $\| \varphi_{k_i} - \varphi_{k_{i+1}} \| < \varepsilon_i$

Or d'après le *théorème 3, on peut trouver* φ_{k_i, n_i}, intégrable R_1, telle que $| \varphi_{k_i} - \varphi_{k_i, n_i} | < \varepsilon_i$ sauf aux points d'un ouvert O_i de mesure $\leqslant \lambda_i$. De même $| \varphi_{k_i, n_i} - \varphi_{k_i, n_{i+1}} < \varepsilon_{i+1}$, sauf aux points d'un ouvert O'_i de mesure λ'_i inférieure a λ_i. Donc, on a, en tenant compte de l'inégalité (1).

$$\| \varphi_{k_{i+1}, n_{i+1}} - \varphi_{k_i, n_i} \| < 3 \varepsilon_i + 4 M \lambda_i = \alpha_i$$

Cherchons à caractériser les points où la différence $| \varphi_{k_{i+1}, n_{i+1}} \ \varphi_{k_i, n_i} |$ dépasse un nombre donné ω_i.

Cette différence étant intégrable R_1, et positive, ne peut être supérieure à ω_1, à l'exception d'un ensemble de mesure nulle qu'aux points d'un ensemble

U_i, de mesure extérieure de Jordan $\mu_i < \alpha_i / \omega_i = h_i$.

Donc en dehors de $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$, les fonctions φ_{k_i, n_i} convergent vers une limite φ si la série $\sum \omega_i$ est convergente.

Pour assurer cette condition, ainsi que la convergence des μ_i, il suffit de

choisir les quantités ε_i, λ_i , ω_i, u_i comme suit :

$$\varepsilon_i = \lambda_i = \frac{1}{2^{2i}} \quad \omega_i = u_i = 1/2^i$$

D'où $\alpha_i = \frac{1}{2^{2i}} [3 + 4 M] = \frac{C}{2^{2i}}$, C étant une constante.

Il s'ensuit que les φ_{k_i, n_i} convergent sauf aux points communs à tous les ensembles de la forme $\bigcup_{j=i}^{\infty} U_j$ c'est-à-dire à limite inférieure E_1 de ces ensembles.

De même les φ_{k_i} tendent vers cette même limite sur C E_1, puisque $| \varphi_{k_i} - \varphi_{k_i, n_i} | < \varepsilon_i$, sauf aux points communs à tous les ensembles de la forme $\bigcup_{j=i}^{\infty} (O_j \cup O'_j)$ c'est-à-dire sauf aux points appartenant à la limite inférieure E_2 de ces ensembles.

Pour que les fonctions considérées convergent sur l'ensemble exceptionnel $E_1 \cup E_2$, il suffit de modifier les valeurs de ces fonctions sur cet ensemble qui est de mesure nulle, en les y prenant toutes égales à zéro par exemple. Ceci ne change pas les valeurs des intégrales R_1 intervenant dans le raisonnement.

Ainsi les φ_{k_i} convergeront partout vers une limite φ qui est aussi la limite des φ_{k_i, n_i} intégrables R_1. Donc φ est intégrable R'_1. L'espace est bien un espace complet.

Corollaire. — *Il y a identité entre les fonctions intégrables R' et les fonctions mesurables.*

En effet il résulte de la définition de l'*intégrale R'*$_1$ d'une part, et du *théorème 4* d'autre part, que l'intégrale R'_1 vérifie les six axiomes d'après lesquels Lebesgue (1) a défini l'intégrale (qui, outre des propriétés géométriques intuitives, impliquent l'additivité restreinte et complète).

Ainsi l'intégrale R'_1 se confond avec l'intégrale L des fonctions bornées ; les fonctions intégrables R'_1 avec les fonctions bornées mesurables, dont on obtient ainsi une nouvelle définition. Cette remarque permet d'obtenir aisément un certain nombre de propriétés classiques de ces fonctions, telles les théorèmes d'EGOROFF et de LUSIN (4), qui découlent presqu'immédiatement de notre *théorème 3.* Signalons enfin que la définition précitée fournit un moyen simple d'aborder certaines extensions de l'intégrale :

a) *Fonctions définies sur R à valeurs dans un espace de BANACH.*

Il est aisé de définir sur ces espaces des intégrales R ou R_1 ; l'on peut déterminer en chaque point de I, l'oscillation $\omega(x)$ de f (x) comme

$$\overline{\lim} \| f(x+k) - f(x-h) \|_{h \to 0,\, k \to 0}$$

la fonction sera intégrable R si $\overline{\int_a^b} \omega(x)\, dx = 0$

L'intégrale lebesguienne s'en déduira par passage à la limite.

b) *Intégrales de* STIELTJES. — On a pu définir pour ces intégrales, des intégrales supérieure et inférieure (intégrales de STIELTJES-DARBOUX) (7) donc une forme d'intégrale riemanienne.

La forme générale de ces intégrales (intégrales de STIELJES-LEBESGUE) peut être obtenue à partir de la forme riemanienne, comme l'intégrale R'_1 à partir de l'intégrale R. Il convient toutefois de substituer aux ensembles de mesure nulle linéaire, des ensembles de mesure nulle par rapport à la fonction génératrice.

IV. — *PASSAGE AUX FONCTIONS NON BORNEES.*

Le cadre limité de cette note ne nous a pas permis de faire une étude particulière des fonctions non bornées. L'intégrale L étant obtenue, on sait qu'on passe des fonctions bornées aux fonctions sommables en bornant ces dernières en module par une constante M qu'on fait tendre vers l'infini.

Signalons cependant un procédé qui se rattache plus directement aux considérations qui précèdent.

Nous supposerons f (x) mesurable sur I, bornée sauf sur un ensemble ouvert U_n de mesure $|U_n| < 1/2^{n+1}$. Alors sur le fermé C U_n on peut appliquer à f (x) le théorème de LUSIN, et trouver un ouvert $O_n \supset U_n$, de mesure $|O_n| < 1/2^n$, sur lequel f(x) est continue. Soit $f_n(x)$ la fonction égale à f(x) si $x \in CO_n$, nulle si $x \in O_n$. $f_n(x)$ est manifestement intégrable L, soit $J_n = \int_a^b f_n(x)\, dx$ cette intégrale.

Nous définirons l'intégrale de f (x) sur L comme la limite si elle existe, de J_n quand n tend vers l'infini.

La catégorie des fonctions intégrables suivant cette définition (qui paraît équivalente à l'intégration au sens de O. PERRON) comprend les fonctions sommables, mais est en fait plus étendue.

En outre cette définition s'étend aux fonctions à valeurs dans un espace de BANACH.

BIBLIOGRAPHIE

1) E. Borel. — Leçons sur les fonctions de variables réelles. Gauthier-Villars, 2ᵉ éd., 1928, pp. 45 et suivantes.

2) F. Riesz et S Nagy. — Leçons d'Analyse Fonctionnelle. Ac. des Sc. de Hongrie, 2ᵉ éd., 1953, p. 101.

3) H. Lebesgue. — Leçons sur l'intégration. Gauthier-Villars, 2ᵉ éd., 1950, pp. 25 et 29.

4) S. Saks. — Theory of the integral — Hafner (New-York), 2ᵉ ed., 1937, pp. 18, 72 et 217.

5) F. Riesz et S. Nagy. — Loc. cit., p. 77.

6) et 7) H. Lebesgue. — Loc. cit., p. 104 et suiv. ; p. 272.

Département de Mathématiques
de la Faculté des Sciences de Saigon