Ann. Fac. Sci. Saigon, **1962**, 7-26.

Contribution à l'Étude des Équations Intégrales de Volterra à Noyaux Logarithmiques

par

SERGE COLOMBO

RÉSUMÉ. — L'Auteur envisage deux fonctions transcendantes qui interviennent dans la résolution des équations intégrales de VOLTERRA lorsque le noyau est de la forme P [log (y — x)], P (u) désignant un polynôme. Mise en évidence de plusieurs propriétés de ces fonctions.

Introduction

1 — Les deux fonctions transcendantes

$$\nu(z; n) = \int_0^\infty \frac{z^{n+s}}{\Gamma(n+s+1)}\, ds$$

$$\mu(z; m, n) = \int_0^\infty \frac{z^{n+s}\, s^m}{\Gamma(n+s+1)\,\Gamma(m+1)}\, ds$$

interviennent dans les solutions de certaines équations intégrales de VOLTERRA dont le noyau appartient au groupe du cycle fermé. Elles font l'objet d'un court chapitre du Traité de MM. ERDELYI, MAGNUS, OBERHETTINGER et TRICOMI sur les fonctions spéciales (1). Nous nous proposons d'exposer ici, certaines de leurs plus intéressantes propriétés.

La fonction ν (x ; 0) avait été envisagée par TOUCHARD (2) dans un mémoire paru en 1913 et relatif à la fonction Gamma. En 1916, VOLTERRA l'a également envisagée lors de la résolution de l'équation intégrale

$$f(t) = \int_0^t \varphi(s) \log(t-s)\, ds,$$

dont la solution peut en effet s'écrire

$$\varphi(t) = -\int_0^t e^{-C} f'(t-u)\, \nu'(u e^{-C}; 0)\, du,$$

C désignant la constante d'EULER (3).

Equations de Volterra à noyaux appartenant au groupe du cycle fermé.

2 — L'équation de VOLTERRA de première espèce

$$f(x) = \int_0^x K(x,y)\,\varphi(y)\,dy \tag{1}$$

dans laquelle $\varphi(y)$ désigne la fonction inconnue, se rencontre fréquemment dans des problèmes de mécanique, d'électricité, de statistique et de biologie (4), (5). Sa résolution est généralement ramenée à celle de l'équation de seconde espèce

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^x K(x,y)\,\varphi(y)\,dy; \tag{2}$$

car en dérivant par rapport à x les deux membres de (1) on retrouve (2). Soulignons à ce propos que si l'équation de VOLTERRA de seconde espèce constitue un cas particulier de l'équation de FREDHOLM

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^a K(x,y)\,\varphi(y)\,dy, \tag{2'}$$

la résolution de celle-ci n'est par contre point rattachée directement à celle de l'équation de première espèce à limites fixes

$$f(x) = \int_0^a K(x,y)\,\varphi(y)\,dy. \tag{1'}$$

Le noyau $K(x,y)$ est dit appartenir au *groupe du cycle fermé* lorsqu'il est de la forme $K(u)$ avec $u = x - y$. On sait l'importance assumée par ce type de noyau dans les applications. Un système physique est dit satisfaire à la *condition du cycle fermé* chaque fois que son évolution, sous l'action d'une cause donnée, reste indépendante de l'instant choisi pour origine des temps ; en d'autres termes, pour une translation dans le temps de toute cause excitatrice on observe simplement une translation égale des effets qui lui correspondent.

— Considérons donc les équations

$$f(x) = \int_0^x K(x-y)\,\varphi(y)\,dy, \tag{3}$$

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^x K(x-y)\,\varphi(y)\,dy. \tag{4}$$

La détermination de leurs solutions est immédiate si l'on prend en considération les transformées de LAPLACE des diverses fonctions qui y figurent car il suffit d'appliquer le *théorème de* HORN-BOREL (6) suivant lequel la transformée de LAPLACE d'un produit de composition est égale au produit des transformées de LAPLACE des fonctions à partir desquelles il est défini. De façon plus formelle, si

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-tp} f(t)\,dt = \mathcal{L}\{f(t)\},\quad G(p) = \int_0^\infty e^{-tp} g(t)\,dt = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

on a

(5) $$\mathcal{L}\{f * g\} = F(p)\,G(p),$$

avec

(6) $$f * g = \int_0^t f(t-s)\,g(s)\,ds = \int_0^t f(s)\,g(t-s)\,ds = g * f.$$

(Pour les conditions de validité de ce théorème on pourra se reporter à la page 34 de la référence ([7])).

En posant dans (3) et (4)

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\},\ N(p) = \mathcal{L}\{K(t)\},\ \Phi(p) = \mathcal{L}\{\varphi(t)\},$$

on obtient dans le cas de l'équation (3)

(7) $$\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(p)}{N(p)}\right\},$$

et dans le cas de l'équation (4)

(8) $$\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(p)}{1+N(p)}\right\}.$$

Utilisant ensuite la formule d'inversion de MELLIN, on obtient finalement

(9) $$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{Br.} \frac{e^{tp}F(p)}{N(p)}\,dp,$$

dans le premier cas, et

(10) $$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{Br.} \frac{e^{tp}F(p)}{1+N(p)}\,dp$$

dans le second cas, Br *désignant un contour de* BROMWICH. En définitive, quand les noyaux appartiennent au groupe du cycle fermé, les solutions des équations intégrales de VOLTERRA s'expriment sous forme d'intégrales prises dans le plan de CAUCHY.

3 — Indiquons au passage comment la relation (8) conduit immédiatement à certaines formules établies par VOLTERRA dans les cas les plus généraux.

On a pour l'équation de seconde espèce

$$\Phi(p) = F(p) - \frac{N(p)}{1+N(p)}\,F(p),$$

de sorte qu'en posant

$$N(p)\,[1+N(p)]^{-1} = \mathcal{L}\{R(t)\},$$

on aura aussi

$$\varphi(t) = f(t) - \int_0^t R(t-s) f(s)\, ds .$$

R (t) est appelé *noyau réciproque.* On a

(11) $$\mathcal{L}\{R(t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} [N(p)]^n$$

d'où, $(\overset{*}{K})^n$ désignant la puissance nième de composition,

(11') $$R(t) = K - (\overset{*}{K})^2 + (\overset{*}{K})^3 - \cdots$$

et on retrouve la série de NEUMANN-LIOUVILLE.

Cas des noyaux logarithmiques.

4 — Nous allons reprendre l'étude des équations intégrales de VOLTERRA dont les noyaux, appartenant au groupe du cycle fermé, sont des polynômes logarithmiques :

(12) $$K(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k (\log u)^k .$$

Nous supposerons les coefficients a_k *réels.* La méthode que nous adopterons, si elle ne diffère pas fondamentalement de celle employée par l'illustre analyste, présente cependant l'avantage d'atteindre plus aisément certains résultats significatifs ; de plus, elle se prolonge tout naturellement aux noyaux plus généraux du type

$$K(u) = P(u, s)$$

où P (u, s) désigne un polynôme des deux variables u et s = log u. (L'étude de ces noyaux plus généraux fera l'objet d'une autre publication).

C'est donc par application du théorème de HORN-BOREL et de la formule d'inversion de MELLIN que nous étudierons les solutions des équations intégrales (3) et (4) dans lesquelles les noyaux sont de la forme (12). (Ce procédé de calcul a été préconisé, semble-t-il, pour la première fois par KOIZUMI ([8]) et appliqué au cas particulier du noyau K (x-y) = log (x-y) par POLI ([9])).

Le développement de la méthode en question nécessite un rappel préalable de quelques résultats élémentaires relatifs aux transformées de LAPLACE de certaines fonctions logarithmiques.

5 — On a

(13) $$\mathcal{L}\{t^n\} = p^{-n-1}\Gamma(n+1), \qquad (n > -1).$$

En dérivant les deux membres par rapport à n, on obtient

(14) $$\mathcal{L}\{t^n \log t\} = p^{-n-1}\left[\Gamma(n+1)\log\frac{1}{p} + \Gamma'(n+1)\right], \quad (n > -1),$$

et, en y faisant n = 0,

(14')
$$\mathcal{L}\left\{\log t\right\} = \frac{1}{p}\left[\log\frac{1}{p} - C\right]$$

C désignant la constante d'EULER : C $= -\Gamma'(1)$.

Une nouvelle dérivation de (14) par rapport à n fournit

(15)
$$\mathcal{L}\left\{t^n(\log t)^2\right\} p^{-n-1}\left[\left(\log\frac{1}{p}\right)^2\Gamma(n+1) + 2\left(\log\frac{1}{p}\right)\Gamma'(n+1) + \Gamma''(n+1)\right],\ (n>-1),$$

qui admet pour cas particulier (n = 0)

(15')
$$\mathcal{L}\left\{(\log t)^2\right\} = p^{-1}\left[\left(\log\frac{1}{p}\right)^2 - 2C\log\frac{1}{p} + \left(C^2+\frac{\pi^2}{6}\right)\right].$$

Avec m dérivations successives on obtient

(16)
$$\mathcal{L}\left\{t^n(\log t)^m\right\} = p^{-n-1}\left[\left(\log\frac{1}{p}\right)^m\Gamma(n+1) + C_m^1\left(\log\frac{1}{p}\right)^{m-1}\Gamma'(n+1) + \cdots + C_m^n\left(\log\frac{1}{p}\right)^{m-n}\Gamma^{(n)}(n+1) + \cdots + \Gamma^{(m)}(n+1)\right],\ (n>-1).$$

Un polynôme en log t, multiplié par t^n *a donc pour transformée de* LAPLACE *un polynôme de même degré en log p multiplié par* p^{-n-1} . C'est là un résultat décisif pour l'orientation de nos calculs.

Notons qu'on peut parvenir au même résultat en partant de la correspondance

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{p^{-n-1}\right\} = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}\,;$$

une première dérivation par rapport au paramètre n fournissant

(17)
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{p^{-n-1}\log\frac{1}{p}\right\} = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}\left[\log t - \psi(n+1)\right],\ n>-1,$$

$\psi(n)$ désignant la dérivée logarithmique de $\Gamma(n)$. Une nouvelle dérivation fournira

(18)
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{p^{-n-1}\left(\log\frac{1}{p}\right)^2\right\} = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}\left[\left\{\log t - \psi(n+1)\right\}^2 - \psi'(n+1)\right].$$

Enfin, si N est un entier positif, on aura, en faisant n = 0 dans la correspondance obtenue après N dérivations successives par rapport au paramètre n

(19)
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{(-1)^N p^{-1}(\log p)^N\right\} = (\log t)^N + \sum_{K=1}^{N}\alpha_K C_N^K(\log t)^{N-K}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ étant les coefficients du développement de BOURGUET

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{z^n}{\Gamma(n+1)}$$

On s'assure aisément que toutes les intégrales de LAPLACE intervenant ci-dessus sont uniformément convergentes pour $n \geqslant n_0 > -1$

6 — La résolution des équations intégrales de VOLTERRA à noyaux logarithmiques fera intervenir systématiquement certaines fonctions transcendantes dont les transformées de LAPLACE s'expriment à l'aide de puissances *entières* et *négatives* de la fonction logarithmique.

En effet, et en se reportant à ce qui a été exposé au paragraphe 4, la solution d'une équation de VOLTERRA de première espèce ayant un noyau du type (12) s'exprimera à l'aide de sommes de produits de composition pour lesquels l'un des facteurs est une fonction ayant pour transformée l'une des quatre expressions suivantes

$$(\log p + \alpha)^{-1} = (\log p e^{\alpha})^{-1}$$

$$(\log p + \alpha)^{-m} = (\log p e^{\alpha})^{-m}$$

$$[(\log p + \alpha)^2 + \beta^2]^{-1} = [(\log p e^{\alpha})^2 + \beta^2]^{-1}$$

$$[(\log p + \alpha)^2 + \beta^2]^{-m} = [(\log p e^{\alpha})^2 + \beta^2]^{-m}$$

α et β désignant des constantes réelles, m un entier positif, puisque l'*integrandum* $\dfrac{e^{tp}F(p)}{N(p)}$ apparaissant dans la solution (9) contient nécessairement un facteur $\dfrac{1}{P(\log p)}$, P (u) désignant un polynôme à coefficients réels. Et le résultat annoncé résulte immédiatement de la décomposition de ce facteur en fractions partielles.

Enfin, si l'on applique la règle opérationnelle

$$\text{(I ; 1)} \qquad \mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right),$$

chacune des quatre expressions données plus haut est la transformée d'une fonction obtenue par changement de la variable indépendante t en $te^{-\alpha}$ et prise respectivement parmi les originaux de

$$p^{-n-1}(\log p)^{-1},\ p^{-n-1}(\log p)^{-m},\ p^{-n-1}[(\log p)^2+\beta^2]^{-1},\ p^{-n-1}[(\log p)^2+\beta^2]^{-m}.$$

Nous établirons plus loin que les deux dernières expressions sont les transformées de certaines combinaisons linéaires des parties réelles et imaginaires de certaines fonctions complexes de la variable réelle, ces dernières étant directement reliées aux originaux des deux premières expressions.

Transcendantes intervenant dans la résolution des équations de Volterra.

7 — Dans ce qui suit, x et t désignent des variables indépendantes réelles, z et p des variables indépendantes complexes $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$, $p = \xi + i\eta = re^{i\omega}$.

Nous poserons $(c > 1,\ n > -1,\ m = 0, 1, 2, \ldots)$

$$(20) \quad \nu(x;n) = \mathcal{L}^{-1}\left\{p^{-n-1}(\log p)^{-1}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{xp}\,dp}{p^{n+1}\log p}$$

$$(21) \quad \mu(x;m,n) = \mathcal{L}^{-1}\left\{p^{-n-1}(\log p)^{-m-1}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{xp}\,dp}{p^{n+1}(\log p)^{m+1}}.$$

Les définitions ci-dessus fournissent $\nu \equiv 0$, $\mu \equiv 0$, pour $t < 0$.

Afin d'opérer commodément leur prolongement analytique, nous allons d'abord rappeler une règle opérationnelle dont il sera d'ailleurs fait assez souvent usage par la suite pour déterminer les propriétés des transcendantes que nous venons d'introduire.

8 — Soit $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$;

$$p^{-1}F(\log p) = \int_0^\infty p^{-1}e^{-s\log p} f(s)\,ds = \int_0^\infty p^{-s-1} f(s)\,ds$$

avec $R(\log p) > \alpha$, ou encore $R(p) > e^{\alpha}$, α désignant l'abscisse de convergence de l'intégrale définissant F (p). Comme

$$p^{-s-1} = \int_0^\infty e^{-tp}\frac{t^s}{\Gamma(s+1)}\,ds, \qquad R(p) > \alpha,$$

on a aussi

$$p^{-1}F(\log p) = \int_0^\infty \frac{f(s)}{\Gamma(s+1)}\,ds \int_0^\infty e^{-pt}t^s\,dt$$

de sorte que si l'on peut intervertir l'ordre des intégrations on aboutit à l'importante règle opérationnelle

$$(\mathrm{I};3) \quad p^{-1}F(\log p) = \mathcal{L}\left\{\int_0^\infty \frac{t^s}{\Gamma(s+1)} f(s)\,ds\right\}.$$

9 — Intégrons par rapport à λ et entre les limites $\lambda = n$ et $\lambda = \infty$ les deux membres de la relation

$$\int_0^\infty e^{-px}\frac{x^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\,dx = p^{-\lambda-1} \qquad (\lambda > -1)$$

Nous obtenons, si $R(p) > 1$,

$$\int_n^\infty d\lambda \int_0^\infty \frac{e^{-px}x^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\,dx = \int_n^\infty p^{-\lambda-1}\,d\lambda = p^{-n-1}(\log p)^{-1}$$

Lorsque n >-1, on peut intervertir l'ordre des intégrations au premier membre, de sorte que

$$\mathcal{L}\left\{\int_n^\infty \frac{x^\lambda\, d\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^\infty \frac{x^{s+n}}{\Gamma(s+n+1)}\, ds\right\} = p^{-n-1}(\log p)^{-1}, \quad (n>-1,\ R(p)>1)$$

soit, en vertu du théorème d'inversion de MELLIN,

$$\nu(x;n) = \int_0^\infty \frac{x^{s+n}}{\Gamma(s+n+1)}\, ds \tag{22}$$

Ceci constitue la première des nouvelles définitions ; on notera qu'elle garde un sens si n $\leqslant$ -1.

Afin d'obtenir la nouvelle définition de μ (x ; m, n) nous utiliserons la règle opérationnelle (I ; 3) en prenant

$$f(x) = \frac{(x-n)^m}{\Gamma(m+1)}\, Y(x-n)$$

Y (x) désigant la fonction échelon-unité. On a ici

$$F(p) = p^{-m-1}\, e^{-np}$$

et on trouve

$$\mathcal{L}\left\{\int_n^\infty \frac{x^s (s-n)^m\, ds}{\Gamma(s+1)\,\Gamma(m+1)}\right\} = p^{-n-1}(\log p)^{-m-1} \quad (R(p)>1)$$

d'où

$$\mu(x,m,n) = \int_0^\infty \frac{x^{s+n}\, s^m}{\Gamma(s+n+1)\,\Gamma(m+1)}\, ds \qquad m = 0,-1,-2,\cdots \tag{23}$$

Dans les deux nouvelles définitions (22) et (23) la variable indépendante peut être complexe. Soit $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$ On posera

$$\nu(z;n) = \int_0^\infty \frac{\rho^{s+n} e^{i(s+n)\theta}}{\Gamma(s+n+1)}\, ds = \int_0^\infty \frac{\rho^{s+n}\cos(s+n)\theta}{\Gamma(s+n+1)}\, ds + i\int_0^\infty \frac{\rho^{s+n}\sin(s+n)\theta}{\Gamma(s+n+1)}\, ds \tag{22'}$$

$$\mu(z;m,n) = \int_0^\infty \frac{\rho^{s+n} e^{i\theta(s+n)} s^m}{\Gamma(s+n+1)\Gamma(m+1)}\, ds = \int_0^\infty \frac{\rho^{s+n} s^m \cos(s+n)\theta}{\Gamma(s+n+1)\Gamma(m+1)}\, ds + i\int_0^\infty \frac{\rho^{s+n} s^m \sin(s+n)\theta}{\Gamma(s+n+1)\Gamma(m+1)}\, ds \tag{23'}$$

10 — Les intégrales qui définissent ainsi ν et μ convergent uniformément par rapport à $z = \rho e^{i\theta}$ dans tout domaine borné du plan de Cauchy lorsque n > -1, et dans tout domaine borné n'incluant pas l'origine lorsque n $\leqslant$ -1. Chacune des deux fonctions admet z = 0 et z = ∞ pour points singuliers ; ce sont des points de branchement logarithmiques. Toute coupure effectuée dans le plan de la variable z et joignant ces deux points singuliers permet de définir des domaines d'holomorphie car ces points singuliers sont les seuls que possèdent ces deux fonctions.

Dans ce qui suivra, n sera supposé réel et m entier positif. Mais il résulte des définitions (22) et (23) que ν (z ; n) et μ (z ; m, n) sont des *fonctions entières de n.*

La résolution des équations de VOLTERRA ne fera intervenir que des valeurs entières positives de m. Cependant, dans certaines applications il peut y avoir intérêt à considérer m quelconque. Comme la définition (23) suppose essentiellement m > -1, il faut recourir à quelque procédé de prolongement analytique ; le plus simple est celui basé sur l'intégration par parties. On peut écrire

$$\mu(z;m,n) = \int_0^\infty \frac{z^{s+n}}{\Gamma(s+n+1)}\, d\left(\frac{s^{m+1}}{\Gamma(m+2)}\right) = \frac{-1}{\Gamma(m+2)}\int_0^\infty s^{m+1}\frac{d}{ds}\left[\frac{z^{s+n}}{\Gamma(n+s+1)}\right] ds.$$

et la dernière intégrale garde un sens pour R (m) > -2. En intégrant ainsi k fois successivement ont obtient

$$\mu(z;m,n) = \frac{(-1)^k}{\Gamma(m+k+1)}\int_0^\infty s^{m+k}\frac{d^k}{ds^k}\left[\frac{z^{s+n}}{\Gamma(s+n+1)}\right] ds$$

ce qui définit μ pour R (m) > -k -1. Avec n = 0 et m = -k on retrouve la correspondance (19) comme il faut s'y attendre.

11 — Soit t une variable indépendante réelle, θ un paramètre réel. On se propose de déterminer les transformées de LAPLACE des fonctions

$$\mathcal{R}\left[\nu(te^{i\theta};n)\right] \quad , \qquad \mathcal{J}\left[\nu(te^{i\theta};n)\right]$$

respectivement parties réelles et imaginaires de ν $(te^{i\theta}; n)$ et qui sont explicitées par (22'). La règle opérationnelle (I ; 3) rend cette détermination immédiate.

En effet,

$$\mathcal{R}\left[\nu(te^{i\theta};n)\right] = (\cos n\theta)\int_0^\infty \frac{t^{s+n}\cos\theta s}{\Gamma(n+s+1)}\, ds - (\sin n\theta)\int_0^\infty \frac{t^{s+n}\sin\theta s}{\Gamma(n+s+1)}\, ds$$

$$= (\cos n\theta)\int_0^\infty \frac{t^s\cos\theta(s-n)}{\Gamma(s+1)}\, Y(s-n)\, ds$$

$$- (\sin n\theta)\int_0^\infty \frac{t^s\sin\theta(s-n)}{\Gamma(s+1)}\, Y(s-n)\, ds$$

D'autre part on a aussi

(I ; 5) $$\mathcal{L}\left\{f(t-a)\,Y(t-a)\right\} = e^{-ap}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$$

D'où finalement

(24) $$\mathcal{L}\left\{\mathcal{R}\left[\nu(te^{i\theta};n)\right]\right\} = \frac{(\log p)\cos n\theta - \theta\sin n\theta}{p^{n+1}\left[(\log p)^2 + \theta^2\right]}$$

(25) $$\mathcal{L}\left\{\mathcal{J}\left[\nu(te^{i\theta};n)\right]\right\} = \frac{(\log p)\sin n\theta + \theta\cos n\theta}{p^{n+1}\left[(\log p)^2 + \theta^2\right]}$$

On en déduit aussi

$$(26)\quad \mathcal{L}\left\{(\cos n\theta)\,\mathfrak{I}\left[\nu(te^{i\theta};n)\right]-(\sin n\theta)\,\mathcal{R}\left[\nu(te^{i\theta};n)\right]\right\}$$

$$=\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty \frac{t^{s+n}\sin\theta s}{\Gamma(s+n+1)}\,ds\right\}=\theta\, p^{-n-1}\left[(\log p)^2+\theta^2\right]^{-1}$$

$$(27)\quad \mathcal{L}\left\{(\cos n\theta)\,\mathcal{R}\left[\nu(te^{i\theta};n)\right]+(\sin n\theta)\,\mathfrak{I}\left[\nu(te^{i\theta};n)\right]\right\}$$

$$=\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty \frac{t^{s+n}\cos\theta s}{\Gamma(s+n+1)}\,ds\right\}=p^{-n-1}(\log p)\left[(\log p)^2+\theta^2\right]^{-1}$$

12 — On a de même avec la fonction μ (t ; m, n),

$$(28)\quad \mathcal{L}\left\{\mathcal{R}\left[\mu(te^{i\theta};m,n)\right]\right\}=\frac{(\log p)\cos n\theta-\theta\sin n\theta}{p^{n+1}\left[(\log p)^2+\theta^2\right]^{m+1}}$$

$$(29)\quad \mathcal{L}\left\{\mathfrak{I}\left[\mu(te^{i\theta};m,n)\right]\right\}=\frac{(\log p)\sin n\theta+\theta\cos n\theta}{p^{n+1}\left[(\log p)^2+\theta^2\right]^{m+1}}$$

$$(30)\quad \mathcal{L}\left\{(\cos n\theta)\,\mathfrak{I}\left[\mu(te^{i\theta};m,n)\right]-(\sin n\theta)\,\mathcal{R}\left[\mu(te^{i\theta};m,n)\right]\right\}$$

$$=\theta\, p^{-n-1}\left[(\log p)^2+\theta^2\right]^{-m-1}$$

$$(31)\quad \mathcal{L}\left\{(\cos n\theta)\,\mathcal{R}\left[\mu(te^{i\theta};m,n)\right]+(\sin n\theta)\,\mathfrak{I}\left[\mu(te^{i\theta};m,n)\right]\right\}$$

$$=p^{-n-1}(\log p)\left[(\log p)^2+\theta^2\right]^{-m-1}$$

Le problème de l'expression de la solution d'une équation de VOLTERRA à noyau logarithmique du type (12) se trouve ainsi résolu. Nous allons maintenant passer à l'étude des propriétés des fonctions ν (z ; n) et μ (z ; m, n). La plupart d'entre elles résultent directement de celles possédées par leurs transformées ; elles sont ainsi faciles à mettre en évidence.

Quelques propriétés générales des fonctions ν (z ; n) et μ (z ; m, n).

12 — La fonction ν (z ; n) est évidemment une fonction multiforme de z, l'origine étant point de branchement logarithmique ; si $-\pi < \theta \leqslant \pi$, les différentes déterminations sont données par

$$\nu(z;n)=\int_n^\infty \frac{\rho^s e^{i(\theta+2k\pi)s}}{\Gamma(s+1)}\,ds$$

avec k = 0, $\pm$ 1, $\pm$ 2, ... Supposons ρ fixé ; le lemme de RIEMANN-LEBESGUE permet de conclure que si le point d'affixe z tourne autour de l'origine, $|\nu(z;n)|$ tend vers zéro avec $\frac{1}{k}$

Les formules (24) et (25) fournissent les transformées des différentes branches de $\nu(z\,;\,n)$.

On peut faire des remarques analogues au sujet de $\mu(z, m, n)$

13 — *Dans ce qui suivra, nous écrirons parfois pour simplifier* $\nu(z)$ *et* $\mu(z\,;\,m)$ *au lieu de* $\nu(z\,;\,o)$ *et* $\mu(z\,;\,m, o)$.

Les relations suivantes sont immédiates :

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k}\cdot \nu(z;n) = \nu(z;n-k) \tag{32}$$

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k}\cdot \mu(z;m,n) = \mu(z;m,n-k) \tag{33}$$

$$\nu(z;n) = \mu(z;0,n) \tag{34}$$

$$z\,\mu(z;m,-1) = (m+1)\,\mu(z;m+1). \tag{35}$$

14 — Il convient de préciser le comportement de $\nu(x\,;\,n)$ lorsque la variable indépendante x, supposée *réelle* et *positive*, tend vers zéro.

a) Lorsque $n \geqslant 0$, on a évidemment $\lim\limits_{x\to+0} \nu(x\,;\,n) = 0$.

b) Soit $0 < a \leqslant 1$. Le théorème de la moyenne permet d'écrire

$$\nu(x;-a) = x^{-\theta a}\int_{-a}^{0}\frac{ds}{\Gamma(s+1)} + \nu(x)$$

$$\nu(x;-a-1) = x^{-(1+a\,\theta_1)}\int_{-a}^{-1}\frac{ds}{\Gamma(s+1)} + x^{-\theta_2}\int_{-1}^{0}\frac{ds}{\Gamma(s+1)} + \nu(x)$$

avec $0 < \theta, \theta_1, \theta_2 < 1$ Donc

$$\lim_{x\to+0} \nu(x;-a) = +\infty \qquad (0 < a \leqslant 1) \tag{36}$$

$$\lim_{x\to+0} \nu(x;-a-1) = -\infty \qquad (0 < a \leqslant 1) \tag{37}$$

et compte tenu de (32), il résulte que si *N est entier positif :*

$$\lim_{x\to+0} \nu(x;n) = +\infty \qquad \text{si} \quad -2N+1 < n < -2N+2 \tag{38}$$

$$\lim_{x\to+0} \nu(x;n) = -\infty \qquad \text{si} \quad -2N \leqslant n < -2N+1 \tag{39}$$

c) Considérons le produit $\nu(x\,;\,n)\,x^{-n}\log x$. On a

$$\nu(x;n)\,x^{-n}\log x = \int_0^\infty \frac{x^s\log x}{\Gamma(s+n+1)}\,ds = \left[\frac{x^s}{\Gamma(s+n+1)}\right] + \int_0^\infty \frac{x^s\,\psi(s+n+1)}{\Gamma(s+n+1)}\,ds$$

Donc

$$\lim_{x\to+0} \nu(x;n)\, x^{-n} \log x = -\frac{1}{\Gamma(n+1)} \tag{40}$$

de sorte que si n est non entier négatif on a

$$x^{\alpha}\nu(x;n) = O\left[\frac{x^{\alpha+n}}{|\log x|}\right] \qquad (x\to+0) \tag{41}$$

tandis que pour n = -1, -2, -3 ..., on a

$$x^{\alpha}\nu(x;n) = O\left[\frac{x^{\alpha+n}}{|\log x|}\right] \tag{42}$$

d'où : *l'intégrale généralisée*

$$\int_0^a x^{\alpha}\nu(x;n)\,dx \qquad (a>0)$$

a un sens lorsque $\alpha + n > -1$. Comme $\nu^{(m)}(x) \equiv \nu(x;-m)$, la fonction $x^{\alpha}\nu^{(m)}(x)$ possède une transformée de LAPLACE si $\alpha > m-1$.

d) On peut préciser davantage le résultat (42). Il suffit de considérer l'expression

$$x^{-n}\nu(x;n)(\log x)^2 = \left[\frac{x^s\log x}{\Gamma(s+n+1)}\right]_{s=0}^{s=\infty} + \left[\frac{x^s\psi(s+n+1)}{\Gamma(s+n+1)}\right]_{s=0}^{s=\infty} - \int_0^{\infty} x^s\frac{d}{ds}\left[\frac{\psi(s+n+1)}{\Gamma(s+n+1)}\right]ds$$

$$= \frac{-\log x}{\Gamma(n+1)} - \frac{\psi(n+1)}{\Gamma(n+1)} - \int_0^{\infty} x^s\frac{d}{ds}\left[\frac{\psi(s+n+1)}{\Gamma(s+n+1)}\right]ds$$

Or, pour n = -1, -2, -3, ..., le premier terme du dernier membre est nul ; le second reste fini ; le troisième tend vers zéro avec x. On a donc

$$x^{\alpha}\nu(x;n) = O\left[\frac{x^{\alpha+n}}{|\log x|^2}\right] \qquad \left(\begin{array}{l}x\to+0,\\ n=-1,-2,\cdots\end{array}\right) \tag{43}$$

La correspondance (22) *établie dans l'hypothèse* $n > -1$ *reste valable pour* $n = -1$. Il suffit en effet de prendre $\alpha = 0$ et $n = -1$ dans (43) pour constater que l'intégrale

$$\int_0^a \nu(x;-1)\,dx \qquad (a>0)$$

possède un sens. D'ailleurs $\nu(x;-1) \equiv \nu'(x)$ et $\int_0^a \nu'(x)\,dx$ a un sens.

15 — Le comportement de $\nu(x)$ pour $x\to+\infty$ peut se déduire de la définition (20). On a

$$\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{xp}(p\log p)^{-1}\,dp, \qquad c>1$$

l'intégrale étant prise suivant le contour de BROMWICH constitué par la droite R (p) = c > 1.

Intégrons la fonction

$$f(p) = e^{xp}(p\log p)^{-1}$$

le long d'un contour fermé C constitué par

1) le segment joignant p = c à p = c + iR
2) le segment joignant p = c + iR à p = iR.
3) le quart de cercle de centre 0 et de rayon F joignant p = iR à p = —R.
4) le segment (—R, —r) de l'axe réel.
5) le demi cercle de centre 0 et de rayon r situé au-dessus de l'axe réel.
6) le contour symétrique, par rapport à l'axe réel, de celui décrit jusqu'ici.

Le théorème des résidus fournit

$$\int_C f(p)\,dp = 2\pi i \lim_{p\to 1}(p-1)f(p) = 2\pi i e^{x}$$

Faisons tendre R vers + ∞ et r vers zéro. Les intégrales prises en 2), 3), et 5), ainsi que celles prises suivant des contours symétriques par rapport à l'axe réel, vont tendre vers zéro. Nous obtenons

$$2\pi i e^{x} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{xp}(p\log p)^{-1}\,dp + \int_{-\infty}^{0} e^{x\xi}(\log|\xi| + i\pi)^{-1}\frac{d\xi}{\xi} + \int_{0}^{-\infty} e^{x\xi}(\log|\xi| - i\pi)^{-1}\frac{d\xi}{\xi}$$

et finalement

$$e^{x} = \nu(x) + \int_0^\infty \frac{e^{-xv}\,dv}{v[\pi^2 + (\log v)^2]}. \tag{44}$$

En remarquant que pour x ⩾ 0

$$0 < \int_0^\infty \frac{e^{-xv}\,dv}{v[\pi^2+(\log v)^2]} \leqslant \int_0^\infty \frac{dv}{v[\pi^2+(\log v)^2]} = 1$$

on a

$$e^{x} - 1 \leqslant \nu(x) < e^{x} \tag{45}$$

Comme $\nu(x;n) = \nu(x) + \int_0^n \frac{x^s\,ds}{\Gamma(s+1)}$, on a $\nu(x;n) = O(e^x)$ quand $x \to +\infty$

Enfin, pour m entier et positif, on établirait que

(46) $$\mu(x; m, n) = O(x^m e^x) \qquad (x \to +\infty)$$

Lorsque la variable indépendante est complexe, on a

$$|\nu(z; n)| \leqslant \int_n^\infty \frac{|z|^s}{\Gamma(s+1)} ds = \int_n^\infty \frac{\rho^s}{\Gamma(s+1)} ds = \nu(\rho; n)$$

c'est-à-dire, pour $n \geqslant 0$,

(47) $$|\nu(z; n)| < e^{|z|} \qquad (n \geqslant 0)$$

$\nu(z, n)$ est donc bornée dans tout domaine borné pour n non négatif

15 bis — La relation (44) a été établie par LANDAU (10). Elle a été signalée aussi par RAMANUJAN (11).

Dans la formule sommatoire de POISSON

$$\sum_{n=0}^\infty x^n \phi(n) - \int_0^\infty x^s \phi(s) ds$$
$$= \frac{1}{2} \phi(0) + \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty 2x^s \phi(s) \cos 2n\pi s\, ds$$

il est possible de mettre le second membre sous diverses formes ; KRONECKER (12), lors d'une recherche visant à justifier rigoureusement un développement donné par PLANA (13) et par ABEL (14), a montré qu'on pouvait l'écrire

$$\int_0^\infty \frac{x^{is} \phi(is) - x^{-is} \phi(-is)}{e^{2\pi s} - 1} ds,$$

tandis que RAMANUJAN a proposé l'expression

$$-\frac{1}{2} \phi(0) + \int_0^\infty s^{-1} [\pi^2 + (\log s)^2]^{-1} \sum_{n=0}^\infty (-xs)^n \phi(n) ds$$

sans toutefois proposer de démonstration, se bornant à vérifier son exactitude dans le cas particulier $\phi(n) = \frac{1}{n!}$ qui est précisément celui que nous venons d'examiner.

Applications aux suites réciproques.

16 — BARRUCAND (15) est parvenu à exprimer les *nombres de* GRÉGORY (ou de CAUCHY) i_n définis par

$$\frac{x}{\log(1-x)} = \sum_{n=0}^\infty i_n x^n$$

sous formes d'intégrales définies faisant intervenir la fonction $\nu(t; n)$

On peut écrire

$$p^{-n-1}(\log p)^{-1} = -p^{-n-1}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\left[\frac{1-\frac{1}{p}}{\log[1-(1-\frac{1}{p})]}\right]$$
$$= -p^{-n}(p-1)^{-1} \sum_{m=0}^\infty i_m \left(1-\frac{1}{p}\right)^m$$

Or, il est aisé de vérifier qu'on a

$$P(t,n) = \int_0^t e^{-u} u^{n-1} du = \mathcal{L}^{-1}\left\{\Gamma(n)\, p^{-1}(p+1)^{-s}\right\}$$

et, $L_m^{(n)}$ désignant les polynômes de LAGUERRE généralisés,

$$\mathcal{L}\left\{t^n L_m^{(n)}(t)\right\} = \frac{\Gamma(m+n+1)}{m!} \quad p^{-n-1}\left(1-\frac{1}{p}\right)^m$$

Le développement écrit ci-dessus devient, en prenant les originaux des deux membres

$$(48) \quad \nu(t;n) = \frac{e^t P(t,n)}{\Gamma(n)} - t^n\left[\frac{i_1}{\Gamma(n+1)} + \frac{1!\, i_2}{\Gamma(n+2)} L_1^{(n)}(t) + \frac{2!\, i_3}{\Gamma(n+3)} L_2^{(n)}(t) + \dots\right]$$

Si n est entier positif,

$$(48') \quad \nu(t;n) = e^t - \left(1 + \frac{t}{1!} + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right) - t^n\left[\frac{i_1}{n!} + \frac{1!\, i_2}{(n+1)!} L_1^{(n)}(t) + \frac{2!\, i_3}{(n+2)!} L_2^{(n)}(t) + \dots\right]$$

et le cas particulier n = 0 fournit

$$(48'') \quad e^t - \nu(t) = \sum_{m=0}^{\infty} i_{m+1} L_m(t)$$

qui, compte tenu de la relation caractéristique des polynômes de LAGUERRE,

$$\left(L_m(t) \equiv L_m^{(0)}(t)\right)$$

$$\int_0^\infty e^{-t} L_m(t)\, L_n(t)\, dt = \delta_m^n$$

fournit

$$(49) \quad i_{m+1} = \int_0^\infty \left[1 - e^{-t}\nu(t)\right] L_m(t)\, dt$$

soit encore, en utilisant la formule (44) de LANDAU-RAMANUJAN,

$$i_{m+1} = \int_0^\infty \frac{v^{m-1}\, dv}{(1+v)^{m+1}\left[\pi^2 + (\log v)^2\right]} = \int_0^\infty \frac{ds}{(s+1)^{m+1}\left[\pi^2 + (\log s)^2\right]}$$

Cette nouvelle représentation a permis a BARRUCAND d'établir une formule relative aux *suites réciproques* et qui généralise la formule sommatoire de RAMANUJAN.

Deux suites f (n) et g (n) sont dites réciproques si l'on a simultanément

$$g(n) = f(0) - n f(1) + \frac{n(n-1)}{2!} f(2) - \cdots + (-1)^r C_n^r f(r) + \cdots + (-1)^n f(n)$$

$$f(n) = g(0) - n g(1) + \frac{n(n-1)}{2!} g(2) - \cdots + (-1)^r C_n^r g(r) + \cdots + (-1)^n g(n)$$

On démontre que

$$\lim_{N\to\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{N} f(n) - \int_0^N f(s)\, ds \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} i_{n+1}\, g(n)$$

et que la relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n f(n) = (1+x)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^n g(n)$$

entraîne le caractère réciproque des deux suites f (n) et g (n). En substituant la représentation intégrale des nombres de GRÉGORY on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} i_{n+1}\, g(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\xi^{n-1}\, d\xi}{(1+\xi)^{n+1}\,[\pi^2 + (\log \xi)^2]}\, g(n)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\sum (-\xi)^n f(n)}{\xi\,[\pi^2 + (\log \xi)^2]}\, d\xi$$

Il suit que $g(n) = L_n(t)$ et $f(n) = \frac{t^n}{n!}$ sont deux suites réciproques, résultat facile à vérifier directement.

Transformées de Laplace.

17 — Les propriétés les plus remarquables des fonctions ν et μ, ainsi que nous l'avons annoncé plus haut (paragraphe 11), peuvent être mises en évidence à l'aide de leurs transformées de LAPLACE (16), (17).

a) On obtient une nouvelle définition de ν (t ; n) à partir de la transformée de la *fonction de* PRYM P (t, n) envisagée au paragraphe précédent

$$\mathcal{L}\left\{ \int_n^{n+1} \frac{P(t,s)}{\Gamma(s)}\, ds \right\} = \int_n^{n+1} \frac{ds}{p\,(p+1)^s} = (p+1)^{-n-1} \left[\log(p+1)\right]^{-1} = \mathcal{L}\left\{ e^{-t} \nu(t;n) \right\}$$

d'où

$$\nu(t;n) = e^t \int_n^{n+1} \frac{P(t,s)}{\Gamma(s)}\, ds.$$

b) La fonction μ possède la propriété générale et commune à toutes les fonctions à deux indices m et n tels que

$$\mathcal{L}\left\{ f(t;m,n) \right\} = \left[\psi(p)\right]^m \left[\psi(p)\right]^n$$

On a

$$\mu(t;m_1,n_1) * \mu(t;m_2,n_2) = \mu(t;m_1+m_2+1,\, n_1+n_2+1)$$

relation dont un cas particulier est

$$\nu(t;n_1) * \nu(t;n_2) = \mu(t;1,n_1+n_2-1)$$

c) La règle opérationnelle

$$p^{-\frac{1}{2}} F(\sqrt{p}) = (\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}} f(s)\,ds \tag{I ; 9}$$

a pour conséquences

$$\nu(x) = (2\sqrt{\pi x})^{-1} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4x}} \nu(t)\,dt \tag{50}$$

$$\nu(x;n) = (2\sqrt{\pi x})^{-1} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4x}} \nu(t;2n)\,dt \tag{51}$$

$$2^m \mu(x;m) = (2\sqrt{\pi x})^{-1} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4x}} \mu(t;m)\,dt \tag{52}$$

d) Enfin, en intégrant par rapport au paramètre n, et entre les limites a + 1 et + ∞ les deux membres des correspondances (18)

$$\mathcal{L}\left\{t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t})\right\} = p^{-n} e^{-\frac{1}{p}}, \quad \mathcal{L}\left\{t^{\frac{n}{2}} I_n(2\sqrt{t})\right\} = p^{-n} e^{\frac{1}{p}},$$

on obtient

$$J_0(2\sqrt{t}) * \nu(t;a) = \int_{a+1}^\infty t^{\frac{s}{2}} J_s(2\sqrt{t})\,ds, \tag{53}$$

$$I_0(2\sqrt{t}) * \nu(t;a) = \int_{a+1}^\infty t^{\frac{s}{2}} I_s(2\sqrt{t})\,ds. \tag{54}$$

18 — Nous terminerons notre étude en donnant deux relations intégro-différentielles auxquelles satisfont les fonctions ν (x ; n)

a) En remarquant que

$$\nu^{(n)}(x;2n) = \nu(x;n),$$

on déduit de la relation intégrale (50) que

$$2\sqrt{\pi x}\, f^{(n)}(x) = \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4x}} f(s)\,ds \tag{53}$$

est satisfaite avec f (x) = ν (x ; 2 n).

b) Soit la relation intégro-différentielle

$$t f'(t) - n f(t) = \int_0^t f(s) f^{(n+1)}(t-s)\,ds \tag{54}$$

proposons nous de déterminer la solution telle que f (0) = f' (0) = f'' (0) = ... = $f^{(n)}$ (0) = 0. Si F (p) = $L\{f(t)\}$, les règles opérationnelles (I ; 2), (I ; 6) et (I ; 7) donnent

$$p F'(p) + p^{n+1} (F(p))^2 + (n+1) F(p) = 0$$

d'où

$$F(p) = p^{-n-1} (\log p - \log C)^{-1},$$

log C désignant la constante d'intégration. Par conséquent, (19),

$$f(t) = C^{-n} \nu(Ct; n).$$

Appendice

Règles opérationnelles relatives à la Transformation de Laplace.

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-tp} f(t)\, dt = \mathcal{L}\{f(t)\},$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br.} e^{tp} F(p)\, dp = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}.$$

1 $\mathcal{L}\{f(\tfrac{t}{a})\} = a^{-1} F(ap) \qquad a > 0$

2 $\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(p)\, G(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}\, \mathcal{L}\{g(t)\}$

3 $\int_0^\infty \frac{t^s}{\Gamma(s+1)} f(s)\, ds = \mathcal{L}^{-1}\{p^{-1} F(\log p)\}$

4 $\mathcal{L}\{e^{\alpha t} f(t)\} = F(p - \alpha)$

5 $\mathcal{L}\{f(t-a)\, Y(t-a)\} = e^{-ap} F(p), \quad a > 0$

6 $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(p)$

7 $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$

8 $\int_0^t f(u)\, du = \mathcal{L}^{-1}\{p^{-1} F(p)\}$

9 $(\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}} f(s)\, ds = \mathcal{L}^{-1}\{\sqrt{p}\, F(\sqrt{p})\}.$

BIBLIOGRAPHIE

1 — A. ERDELYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER and F.G. TRICOMI. — *Higher Transcendental Functions*, Mc Graw Hill, New York, 1950, **3**.

2 — J. TOUCHARD. — Bull. Soc. Math. France, 1913, 234-242.

3 — V. VOLTERRA. — Atti Accad. Lincei, 1916, **11**, 25.

4 — V. VOLTERRA et J. PÈRES. — *Théorie Générale des Fonctionnelles* Gauthier-Villars, Paris, 1936.

5 — V. VOLTERRA. — *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie* Gauthier-Villars, Paris, 1931.

6 — E. BOREL. — *Leçons sur les Séries divergentes*, Gauthier-Villars, Paris, 1928, 2e édit.

7 — S. COLOMBO. — *Les Transformations de Mellin et de Hankel* C.N.R.S.. Paris, 1959.

8 — KOIZUMI. — Phil. Mag., 1931, 431.

9 — L. POLI. — Ann. Soc. Sc. Bruxelles, 1935, **55**, 111-119.

10 — LANDAU. — Math. Zeits., 1918, **1**, 213-219.

11 — G.H. HARDY. — *Ramanujan*, Cambridge University Press, Cambridge, 1940.

12 — KRONECKER. — Journal de Crelle, 1889, **105**, 345-354.

13 — PLANA. — Memorie Accad. Torino, 1820, **25**, 403-418.

14 — ABEL. — *Œuvres Complètes* (éditées par Sophus Lie) Gauthier-Villars, Paris, 1.

15 — P. BARRUCAND. — C.R. Ac. Sc. 1950, **230**, 1727-1728.

16 — P. HUMBERT et L. POLI. — Bull. Sc. Math. 1944, **68**, 204-214.

17 — S. COLOMBO. — Bull. Sc. Math. 1953, **77**, 89-104, Ibid. 1955, **79**, 72-78.

18 — P. BARRUCAND et S. COLOMBO. — C.R. Acad. Sciences, 1950, **230**, 1335-1337.

19 — S. COLOMBO. — C.R. Acad. Sciences, 1952, **235**, 857-858.

Département de Mathématiques