Ann. Fac. Sci., Saigon **1962**, *27-32.*

Remarque sur le Théorème de Schwarz

par

A. PACQUEMENT

De nombreuses questions d'Analyse font intervenir l'interversion des variables dans les dérivées secondes mixtes. Nous allons chercher à préciser les conditions de validité de cette opération.

Nous nous bornons aux fonctions numériques définies dans un ouvert Ω de R^2 ; les conclusions s'étendent aux fonctions vectorielles, moyennant une définition adéquate de l'intégrale de ces fonctions.

Nous rappellerons certaines égalités élémentaires, et chercherons à en tirer des énoncés locaux, puis globaux.

1. — EGALITES ELEMENTAIRES.

On désignera par P,(x,y), un point de Ω. Nous supposerons que la fonction étudiée f (x,y) a ses deux dérivées secondes mixtes $f''_{x,y}$, $f''_{y,x}$ définies en tout point de Ω. Ces deux fonctions sont mesurables B.

Soit $P_0 \in \Omega$; nous supposerons d'abord $f''_{x,y}$, $f''_{y,x}$ bornées en module par un nombre M dans un voisinage de P_0, qu'on peut supposer, en changeant au besoin les notations être Ω lui-même.

Nous désignerons par $R(x,y\,;\,x_1,y_1)$ le rectangle $R < \Omega$ de sommets (x,y), (x_1,y), (x,y_1), (x_1,y_1), et par $A(x,y\,;\,x_1,y_1)$, la quantité $f(x_1,y_1) - f(x_1,y) - f(x,y_1) + f(x,y)$. Pour un rectangle $R_0 < \Omega$, dont un sommet est P_0, nous écrivons $R_0(h,k)$ pour $R(x_0,y_0,x+h,y_0+k)$; $A_0(h,k)$ pour $A(x_0,y_0; x_0+h, y_0+k)$, ε désignera comme il est d'usage un nombre positif arbitraire. Les intégrales sont entendues au sens de LEBESGUE.

Appliquant à f dans $\overline{R}_0$ la formule de réduction des intégrales doubles de LEBESGUE il vient :

$$\iint_{R_0} f''_{x,y}\,dxdy = \int_{x_0}^{x_0+h} dx \int_{y_0}^{y_0+k} f''_{x,y}\,dy$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} \left[f'_x(x,y_0+k) - f'_x(x,y_0)\right] dx = A_0(h,k)$$

on trouve de même, en modifiant l'ordre des intégrations

$$\iint_{R_o} f''_{y,x}\, dxdy = A_o(h,k)$$

d'où :

$$\iint_{R_o} f''_{x,y}\, dxdy = \iint_{R_o} f''_{y,x}\, dxdy = A_o(h,k) \qquad (1)$$

Posons $\lambda = f''_{x,y}(P_o)$; $\mu = f''_{y,x}(P_o)$. On déduit immédiatement des égalités (1) les égalités suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &\iint_{R_o} (f''_{x,y} - \lambda)\, dxdy = A_o\,(h,k) - \lambda\, h,k \\ &\iint_{R_o} (f''_{y,x} - \mu)\, dxdy = A_o\,(h,k) - \mu\ \ h,k \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

2. — ENONCES LOCAUX.

a) Nous allons chercher dans quels cas on peut affirmer que l'on a $\lambda = \mu$. Il suffira de reprendre la démonstration classique, en employant le théorème de la moyenne au lieu de la formule des accroissements finis. Redémontrons d'abord le :

THÉORÈME 1 (Schwarz) : *On a $f''_{x,y}\,(P_o) = f''_{y,x}\,(P_o)$, si $f''_{x,y}$ et $f''_{y,x}$ sont continues en P_o.*

Les dérivées secondes mixtes étant continues en P_o, il existe un voisinage V_{P_o} de P_o, tel que pour $P \notin V_{P_o}$ on ait :

$$\left| f''_{x,y}\,(P) - \lambda \right| < \varepsilon \qquad \left| f''_{y,x}\,(P) - \mu \right| < \varepsilon$$

Appliquant le théorème de la moyenne aux intégrales des formules (2), il vient :

$$\left| \iint_{R_o} (f''_{x,y}\,(P) - \lambda)\, dxdy \right| < \varepsilon\, |hk|$$

$$\left| \iint_{R_o} (f''_{y,x}\,(P) - \mu)\, dxdy \right| < \varepsilon\, |hk|$$

d'où :

$$\left| A_o\,(h,k) - \lambda\, hk \right| < \varepsilon\, |hk| \qquad \left| A_o\,(h,k) - \mu\, hk \right| < \varepsilon\, |hk|$$

et en appliquant l'inégalité triangulaire à ces deux inégalités, on trouve :

$$|\lambda - \mu|\,|hk| < 2\,\varepsilon |hk| \quad \text{ou} \quad |\lambda - \mu| < 2\,\varepsilon \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

b) Cette démonstration suggère l'extension ci-après : mais tout d'abord certaines définitions devront être rappelées ou précisées :

Soit $\overline{Q} \in \Omega$ un rectangle contenant P_o, a et b les longueurs des bases de Q, dont les rapports sont supposés bornés par deux nombres positifs inverses l'un de l'autre : par exemple a et b devront vérifier $\frac{1}{2} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 2$. On dit alors que les rectangles Q forment une famille semi-régulière. On a les définitions ci-après :

DÉFINITION 1 : *On appellera densité superficielle d'un ensemble E de R^2 ($E \subset \Omega$), au point P_o, la limite, supposée existante, de $\frac{|E \cap Q|}{|Q|}$ lorsque $|Q| \to 0$.* ($|A|$ désigne comme il est d'usage la mesure (superficielle ici) de l'ensemble A).

DÉFINITION 2 : *Une fonction $\varphi(P)$ sera dite approximativement continue en P_o si l'ensemble $E(P,\varepsilon)$ des points P vérifiant $|\varphi(P) - \varphi(P_o)| < \varepsilon$ a la densité un en P_o.*

Il résulte de ces deux définitions qu'il existe un nombre L_1 tel que pour tout rectangle Q de dimensions inférieures à L_1, on a pour $P \in R$.

$$|E(P,\varepsilon)| > (1-\varepsilon)|q|$$

on pourra notamment supposer que P_o est sommet de Q. Ceci dit, démontrons le

THÉORÈME 2 : *On a $f''_{x,y}(P_o) = f''_{y,x}(P_o)$ si $f''_{x,y}$ et $f''_{y,x}$ sont toutes deux approximativement continues en P_o et bornées dans un voisinage de ce point.*

Il résulte en effet des hypothèses qu'il existe un nombre L_1, tel que pour Q de dimensions inférieures à L_1 on ait $|f''_{x,y}(P) - f''_{x,y}(P_o)| < \varepsilon$ sauf aux points d'un ensemble E_1 de mesure inférieure à $\varepsilon \times$ a.b.

Il existe de même un nombre L_2, tel que pour Q de dimensions inférieures à L_2 on ait $|f''_{y,x}(P) - f''_{y,x}(P_o)| < \varepsilon$ sauf aux points d'un ensemble E_2 de mesure inférieure à $\varepsilon \times$ a.b.

Si on prend $L < \inf.(L_1, L_2)$, on peut prendre Q de dimension maximum égale ou inférieure à L : on supposera que P_o est sommet de Q. On a évidemment :

$$\iint_{R_o} \left[f''_{x,y}(P) - \lambda\right] dxdy = \iint_{R_o - E_1 \cup E_2} \left[f''_{x,y}(P) - \lambda\right] dxdy + \iint_{E_1 \cup E_2} \left[f''_{x,y}(P) - \lambda\right] dxdy$$

Or dans le premier ensemble $R_o - E_1 \cup E_2$, par définition, on a $|f''_{x,y}(P) - \lambda| < \varepsilon$. Sur $E_1 \cup E_2$ on a $|f''_{x,y}(P) - \lambda| < 2M$; donc en appliquant le théorème de la moyenne aux deux intégrales du second membre, on trouve :

$$\left|\iint_{R_o} \left[f''_{x,y}(P) - \lambda\right] dxdy\right| < \varepsilon |hk| + 2\varepsilon |hk| \times 2M = \varepsilon(1+4M)hk$$

De même :

$$\left|\iint_{R_o} \left[f''_{y,x}(P) - \mu\right] dxdy\right| < \varepsilon(1+4M)\ hk$$

et en appliquant l'inégalité triangulaire

$$|\lambda - \mu| < 2\varepsilon(1+4M)$$

Ce qui donne encore $\lambda = \mu$. Dans cette démonstration l'hypothèse que les dérivées secondes mixtes restent bornées dans un voisinage de P_o est essentielle.

Signalons l'énoncé suivant :

THÉORÈME 3 : *Si $f'_{x,y}$ et $f'_{y,x}$ existent dans, ouvert Ω de R^2 et si $\frac{df}{dx}$ et $\frac{df}{dy}$ sont différentiables au point (a,b) de Ω alors $f''_{x,y}(a,b) = f''_{y,x}(a,b)$.*

3. — ENONCE GLOBAL.

Nous ne supposerons plus les dérivées secondes mixtes bornées ; notons que la démonstration des égalités (1) reste encore valable, en vertu du théorème de FUBINI sur le calcul des intégrales doubles, moyennant l'hypothèse suivante :

Les dérivées secondes mixtes $f''_{x,y}(P)$ *et* $f''_{y,x}(P)$ *sont sommables dans* Ω.

Dans ces conditions les intégrales doubles se calculent par intégrations successives.

D'autre part chaque dérivée seconde mixte est sommable par rapport à l'une des variables pour presque toutes les valeurs de l'autre. Appelons V_o et V'_o les ensembles de valeurs de y pour lesquelles $f''_{x,y}(P)$, $f''_{y,x}(P)$ respectivement ne sont pas sommables par rapport à x.

Il résulte de ce que nous venons de dire que

$$|V_o| = |V'_o| = O$$

Dans ces conditions le théorème de FUBINI permet d'écrire :

$$\iint_{R\ (x_o, y_o, x, y)} f''_{x,y}(P)dxdy = \int_{x_o}^{x} dx \int_{y_o}^{y} f''_{x,y}(P)\, dy =$$

$$= \int_{y_o}^{y} dy \int_{x_o}^{x} f''_{x,y}(P)\, dx = A\ (x_o, y_o, x, y)$$

on a, de même :

$$\iint_{R\ (x_o,\ y_o,\ x,y)} f''_{y,x}(P)\ dxdy = \int_{y_o}^{y} dy \int_{x_o}^{x} f''_{y,x}(P)dx = A\ (x_o, y_o, x, y)$$

D'où finalement l'égalité :

$$\int_{y_o}^{y} dy \int_{x_o}^{x} f''_{x,y}(P)\ dx = \int_{y_o}^{y} dy \int_{x_o}^{x} f''_{y,x}(P)\ dx = A(x_o, y_o, x, y) \quad (3)$$

Ces égalités vont nous permettre de démontrer qu'on a presque partout dans Ω l'égalité des dérivées secondes mixtes. Nous utiliserons dans ce but un raisonnement classique de LEBESGUE.

Donnons à x une suite dénombrable de valeurs ξ_i, formant un ensemble partout dense sur Ox, par exemple les valeurs rationnelles. On a en remplaçant x par ξ_i dans les formules (3) :

$$\int_{y_o}^{y} dy \int_{x_o}^{\xi_i} f''_{x,y}(P)dx = \int_{y_o}^{y} dy \int_{x_o}^{\xi_i} f''_{y,x}(P)dx = A(x_o, y_o, \xi_i, y)$$

Ces deux intégrales en dy sont des intégrales indéfinies égales pour toutes les valeurs admissibles de y (telles que $P \in \Omega$). Les dérivées de ces intégrales sont donc égales presque partout en vertu du théorème de LEBESGUE ; on a donc :

$$\int_{x_0}^{\xi_i} f'_{x,y}(P)dx = \int_{x_0}^{\xi_i} f'_{y,x}(P)dx$$

pour $y \notin V_i, V_i$ désignant un ensemble de valeurs de y de mesure nulle.

Si l'on choisit $y \notin V = \bigcup_i V_i \cup V_o \cup V'_o$, les deux intégrales existent et sont égales pour toutes les valeurs de ξ_i ; il s'ensuit qu'on a quel que soit ξ, y désignant une valeur fixe de l'ordonnée

$$\int_{x_o}^{\xi} f'_{x,y}(P)\ dx = \int_{x_o}^{\xi} f'_{y,x}(P)dx$$

puisque ces intégrales sont deux fonctions continues de ξ, égales sur un ensemble partout dense des valeurs de ξ, les ξ_i.

En appliquant de nouveau le théorème de LEBESGUE à ces deux intégrales indéfinies, on voit que l'on a :

$$f''_{x,y}(\xi,y) = f''_{y,x}(\xi,y)$$

pour presque toutes les valeurs de ξ, c'est-à-dire si $\xi \notin U_y$, U_y étant un ensemble de valeurs de x de mesure nulle, défini pour une valeur donnée de y.

Appelons U, l'ensemble superficiel réunion des U_y. On a $|U| = O$ comme intégrale presque partout de $|U_y|$, qui est égale à zéro.

On a donc $f''_{x,y}(P) = f''_{y,x}(P)$, sauf si P appartient à l'un des ensembles $V \cap \Omega$, ou U. Ces deux ensembles étant de mesure nulle, l'égalité a lieu presque partout. On a donc notamment l'énoncé suivant :

THÉORÈME 4 : *Soit une fonction numérique $f(x, y)$ définie dans un ouvert Ω de R_o, et y ayant en tout point des dérivées secondes mixtes ; si ces fonctions sont sommables dans Ω elles y sont égales presque partout.*

En particulier on a le résultat suivant dû à P. MONTEL.

THÉORÈME 4 bis : *$f(x,y)$ vérifiant les mêmes hypothèses, si les dérivées secondes mixtes sont bornées dans Ω elles y sont égales presque partout.*

Cet énoncé découle d'ailleurs de notre théorème 2 en observant qu'une fonction mesurable est p.p. approximativement continue.

REMARQUE : On pourrait chercher à rattacher l'égalité des dérivées secondes mixtes à la théorie des fonctions d'intervalle. En effet, la quantité $A(x,y, x_1, y_1)$ est une fonction additive d'intervalle au sens de BURKILL.

Si le rectangle $\overline{R}(x,y,x_1,y_1)$ renferme M_o, et qu'on fasse tendre $|R|$ vers zéro, on définit les dérivées extrêmes de la fonction d'intervalle A par les formules ci-après : $\underline{D}_f(A) = \liminf \frac{A(x,y,x_1y_1)}{R}$, $\overline{D}_f(A) = \limsup \frac{A(x,y,x_1,y_1)}{R}$ quand a et b tendent vers zéro de toutes les façons possibles. $\underline{D}(A) = \liminf \frac{A(x,y,x_1,y_1)}{R}$; $\overline{D}(A) = \limsup \frac{A(x,y,x_1,y_1)}{R}$ quand a et b tendent vers zéro, R appartenant à une famille semi-régulière.

On démontre que l'on a presque partout $\underline{D}(A) = \overline{D}(A)$, mais cette quantité peut être infinie sur un ensemble de mesure non nulle ; et l'existence de cette limite ne préjuge pas l'existence, ou l'égalité de $f''_{y,x}(P_o)$ et de $f''_{y,x}(P_o)$. Il résulte d'un théorème de WARD que ce n'est que lorsque $P_o \in E$, E étant le sous-ensemble des points de Ω pour lesquels on a $-\infty < \underline{D}_f(A) \leqslant \overline{D}_f(A) < +\infty$, que l'on a $\underline{D}_f A = \overline{D}_f A$ presque partout sur E.

Il en résulte qu'on a aussi $f''_{x,y}(P_o) = f''_{y,x}(P_o)$ presque partout sur E.

BIBLIOGRAPHIE

1. — M[me] LELONG. — Cours de la Sorbonne : Dérivées et différentielles. Centre de Documentation universitaire 2e édition, 1961, p. 23 et 29.

2. — *C. de la* VALLÉ POUSSIN. — Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire — Gauthier-Villars, 2e édition, 1934, p. 54 et suiv., p. 76, p. 86.

3. — *St.* KEMPISTY. — Fonctions d'intervalles non négatives — Hermann et Cie, 1re éd., 1939, p. 18 et suiv.

4. — S. SAKS. — Theory of the integral — Hafner (New York), 2e éd., 1937, p. 76 et suiv., p. 133 à 141.

5. — P. MONTEL. — Thèse — Gauthier-Villars 1907, p. 59.

Département de Mathématiques

Ann. Fac. Sci., Saigon **1962**, *33-38*.

Sur les Suites de Fonctions Mesurables et l'Extension du Théorème de Peano

par

A. PACQUEMENT

Dans notre note insérée sous ce même titre dans les Annales de la Faculté des Sciences de Saigon de 1961, une définition insuffisamment élaborée nous avait conduit à un certain nombre d'assertions erronées. Nous procédons ci-après à la rectification qui s'impose.

Dans la deuxième partie de la Note précitée intitulée « *Suite de fonctions mesurables et continuité approximative* » nous rappelions les deux définitions données par M.A. DENJOY de la continuité approximative d'une fonction, et étendions ces définitions aux suites convergentes de fonctions mesurables. Mais en réalité alors que les deux définitions sont bien équivalentes en ce qui concerne une fonction, il n'en est plus de même lorsqu'il s'agit d'une suite. Il nous faut donc préciser la définition de l'oscillation approximative d'une suite convergente de fonctions, ce qui nous amène à reprendre pratiquement dans son entier la deuxième partie de notre Note précédente.

De ce fait il n'est plus possible de maintenir certains résultats de la troisième partie intitulée « *Etude de certaines équations différentielles* ». Le lemme 2 est inexact, ainsi que les deux remarques finales ; la portée du théorème 6 se trouve donc réduite. Nous devrons donc en rectifier l'énoncé et compléter la démonstration du théorème 7 qui était déduit du théorème 6 sous sa forme initiale.

Nous ajouterons quelques errata dûs à des erreurs matérielles survenues dans l'impression de notre précédente note ; nous conservons aux définitions et théorèmes les mêmes numéros que dans la note initiale. Nous reprenons donc dans le sens indiqué les parties II et III de notre note de 1961.

II. — SUITES DE FONCTIONS MESURABLES ET CONTINUITE APPROXIMATIVE

Nous revenons sur les définitions de l'oscillation approximative d'une fonction numérique f(x) en un point, que nous formulons d'abord comme suit :

En vertu du théorème de PEANO, l'équation 3bis admet une solution définie pour $x \in I$, dont le graphe passe par P_o et est contenu dans R_o. Si on appelle $y_n(x)$ une telle solution on démontre en se servant de l'égale continuité de la famille y_n, que celle-ci contient une sous-suite convergente, $y_N(x)$, dont la limite est solution de (2bis). Appelons $y(x)$ cette solution.

3) On démontre qu'en tout point de densité d'un des essembles F_N, on a :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y).$$

Or nous avions cru pouvoir déduire de notre théorème 5 que tout point de I était point de densité d'un des F_n . Cette conclusion est inexacte. On ne peut donc pas dire que l'équation (2bis) est équivalente à l'équation (2). En fait la solution y de 2bis n'est pas nécessairement dérivable en tout point de I ; elle ne l'est que presque partout ; pour les autres points tout ce que l'on peut affirmer, c'est que y a des nombres dérivés finis (puisque bornés en module par M), et que $f(x, y)$ est compris entre les deux dérivées extrêmes. On doit donc se borner pour les équations qui nous occupent, au résultat suivant :

THÉORÈME 6 (rectifié). — *Si l'on considère l'équation* $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$, *où f est définie, localement bornée, continue séparément par rapport à chacune des variables x, y dans un voisinage du point* (x_o, y_o), *l'équation intégrale associée*

$$y = y_o + \int_{x_o}^{x} f\left[t, y(t)\right] dt$$

admet au moins une solution passant par ce point, dont le graphe est défini à l'intérieur d'un rectangle de sécurité centré sur ce point.

En outre quand la solution $y(x)$ de l'équation intégrale est dérivable, c'est-à-dire presque partout dans I, $\dfrac{dy}{dx}$ vérifie l'équation différentielle proposée. C'est d'ailleurs là en cas particulier d'un théorème comme de Crathéodory.

Il y a cependant des cas où l'on peut affirmer que $y(x)$ est dérivable. En effet $I = \bigcup_{N=1}^{\infty} F_N$. Or les F_N sont des ensembles fermés, comme leur réunion est l'intervalle fermé I, les F_N ne peuvent tous être non denses sur I en vertu du théorème de BAIRE. Il existe donc des sous-intervalles σ_k. de I où σ coïncide avec une portion de l'un des F_N. Ces intervalles σ_k forment un ensemble d'intervalles partout dense sur I. Il est clair que sur chaque σ_k la densité des F_N est égale a un pour des valeurs convenables de $N \geqslant N_k$.

Donc si x_o appartient à un des intervalles σ_k l'équation (2) a au moins une solution passant par le point P_o définie pour x appartenant à σ_k.

Mais cette solution ne peut en général pas être prolongée au-delà des extrémités de l'intervalle σ_k qui est ainsi l'intervalle maximal d'existence de la solution : quand on voudra établir des résultats plus étendus on devra démontrer directement la dérivabilité de la solution $y(x)$ de l'équation intégrale 2bis.

C'est ce que nous allons faire quand la fonction $f(x,y)$ est sommablement lipschitzienne, c'est-à-dire que l'on a dans R_o :

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right| < k(x)\left|y_1-y_2\right|$$

k (x) étant une fonction positive de x sommable sur I.

L'existence d'une solution de l'équation intégrale associée existe en vertu du théorème 6. Prouvons que cette solution y(x) est dérivable.

On a en effet dans R_o

$$y(x+h)-y(x) = \int_x^{x+h} f\left[t,y(x)\right] dt + \int_x^{x+h} (f\left[t,y(t)\right] - f\left[t,y(x)\right])dt$$

d'où

$$\left|y(x+h)-y(x) - \int_x^{x+h} f\left[t,y(x)\right] dt\right| < \left|\int_x^{x+h} k(t)(y(t)-y(x))dt\right|$$

Or en vertu du théorème de la moyenne on a :

$$\left|y(t) - y(x)\right| < M\left|t-x\right| \leqslant Mh$$

Il s'ensuit que

$$\left|\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f\left[t,y(x)\right] dt\right| < M\int_x^{x+h} k(t)dt$$

Comme k (t) est sommable, on peut prendre h assez petit, $h<h_o$ par exemple pour que le deuxième membre de l'inégalité soit inférieur à ε. Il s'ensuit que y(x) a une dérivée si :

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f\left[t,y(x)\right] dt \text{ a une limite.}$$

Or la fonction sous le signe somme étant continue en t d'après l'hypothèse (a) faite sur f, cette limite quand h tend vers zéro est f $\left[x,y(x)\right]$.

Donc dans ce cas y' existe et vérifie l'équation (2). On démontre aisément que la solution ainsi obtenue est unique. Nous avons ainsi vérifié notre

THÉORÈME 7. — *L'équation différentielle* $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ *où f est continue en x, sommablement lipschitzienne en y et bornée, dans un voisinage de* (x_o, y_o), *admet une solution et une seule passant par ce point, dont le graphe est défini dans un rectangle de sécurité centré sur ce point.*

BIBLIOGRAPHIE

1) Cf. Notre note portant le même titre dans les Annales de la Faculté des Sciences de Saïgon, 1961.

2) A. DENJOY. — Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse. Gauthier-Villars, 1954, pp. 141 à 143.

3) Theory of ordinary differential equation par Earl A. Coddington and Norman Levinson (Mac Graw Hile 1955) p.p. 43 et suivants.

ERRATA DE L'ARTICLE DE 1961

Page 9. — Théorème 1. — Supprimer la condition a)

(En effet le « noyau d'EGOROFF » n'est pas un absolu, il dépend de la manière dont on a formé les U_i et comporte une large part d'indétermination. On peut toujours supposer notammant qu'un ensemble fini donné de points, donc que x_0, ne fasse pas partie de cet ensemble).

Page 9. — Ligne 19 : Lire lim $\lambda_n(x)$ au lieu de lim $\omega(x)$.

Page 9. — Théorème 2. — 2[e] ligne : Lire $f_n\left[x, g_n(x)\right]$ au lieu de $f_n\left[x, g(x)\right]$

Page 10. — Il faut préciser que l'ensemble $E(x_0, \varepsilon)$ renferme x_0.

Département de Mathématiques